Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное агентство по образованию
Южно-Уральский государственный университет
Филиал в г. Златоусте
Кафедра «Техническая механика»

515 (07)
Ш965

И.И. Шундеева

НАЧЕРТАТЕЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Конспект лекций

Челябинск
Издательство ЮУрГУ
2007

ВВЕДЕНИЕ

Графика инженерная – комплекс дисциплин (начертательная геометрия, теория перспективы, техническое черчение, рисование и т.д.), заключающих в себе знания для выполнения графических работ инженерной практики.

Курс готовит студентов к выполнению и чтению чертежей, как в процессе обучения, так и в последующей инженерной деятельности. Знание инженерной графики позволяет инженеру выполнить чертежи так же, как чтение азбуки и грамматики позволяет человеку читать и писать.

Основные задачи курса:

1. Выполнение чертежей, то есть изображение несложных изделий на комплексном чертеже и в аксонометрических проекциях, в перспективе.
2. Чтение чертежей, то есть получение мысленного представления форм и размеров изделий по их изображениям на чертеже.
3. Рассмотрение графических способов решения задач, связанных с геометрическими образами и их расположением в пространстве.
4. Ознакомление с основными требованиями стандартов ЕСКД к чертежам и схемам и СПДС.
5. Развитие навыков техники выполнения чертежей.
6. Выполнение чертежей с использованием ЭВМ.

Геометрия – общая наука о пространственных формах. В отличие от других естественных наук она изучает объекты реального мира в наиболее абстрактном виде, принимая во внимание только форму предметов и не учитывая их физических и иных свойств.

В настоящее время эта наука имеет многочисленные разделы.

Начертательная геометрия – это математическая наука, раздел геометрии, который изучает теоретические основы методов построения изображения (чертежей) пространственных форм на какой-либо поверхности и способы решения различных геометрических задач на этих изображениях.

Чертеж имеет исключительно большое значение в практической деятельности человека. *Чертеж* – средство выражения замыслов конструктора и основной документ, по которым осуществляется строительство зданий и инженерных сооружений, изготовление машин, механизмов и их основных составных частей.

В начертательной геометрии чертеж является основным средством изучения свойств фигур. Не всякий чертеж может служить этим целям, а такой, который обладает следующими свойствами:

– наглядностью;

– обратимостью (то есть по чертежу можно восстановить объект в пространстве с геометрической равноценностью оригинала);

– простотой оригинала;

– точностью графических решений.

Изучение начертательной геометрии развивает пространственное и логическое мышление, необходимое в любой области инженерной деятельности; позво-

ляет графически воспроизводить свою мысль; решать пространственные задачи.

Для построения пространственных форм начертательная геометрия применяет *метод проецирования*. Термин «проецирование» (proectio (лат.) – бросание вперед, вдоль) применяется в смысле «построение проекций». Получающиеся при этом чертежи называются *проекционными.*

Простейшими геометрическими образами являются: точки, прямые, плоскости.

Точка не имеет размеров. Представление о точке дает след острия карандаша на бумаге.

Прямая – простейшая линия, имеет одно измерение. След, который оставляет на бумаге острие карандаша, движущегося вдоль края линейки.

Плоскость – простейшая поверхность, имеет два измерения. Спокойная поверхность воды в озере, поверхность стола.

Пространственная форма – (геометрическая фигура, объект) является совокупностью точек, линий и поверхностей. Может быть представлена как совокупность точек.

Таким образом, содержанием начертательной геометрии является:

– исследование способов построения проекционных чертежей;

– решение геометрических задач, относящихся к пространственным фигурам;

– приложение способов начертательной геометрии к исследованию практических и теоретических вопросов науки и техники.

В наше время нелегко указать на такой вид человеческой деятельности, где бы в большей или меньшей степени не приходилось прибегать к помощи чертежей. Чертежи, построение по правилам начертательной геометрии, имеют большое значение в жизни общества, подтверждается широким их применением в конструкторских работах, машиностроении, в архитектуре и в других областях науки и техники.

Без знания правил выполнения чертежей нельзя читать чертежи, и создавать чертежи новых машин и приборов.

Если чертеж является языком техника, то начертательная геометрия служит грамматикой этого языка, так как она учит нас правильно читать чужие и излагать наши собственные мысли, пользуясь в качестве слов одними только линиями и точками, как элементами всякого изображения.

Начертательная геометрия изучает пространственные формы и их отношения, используя метод «проецирования», с помощью которого строятся различные изображения, в том числе и чертежи. Чертеж имеет исключительно большое значение в практической деятельности человека. Он является средством выражения замыслов ученого, конструктора, проектировщика, архитектора и основным производственным документом по которому осуществляется строительство различных зданий, инженерных сооружений, изготовление машин и механизмов. Знания и навыки, приобретенные при изучении начертательной геометрии, послужат основой при решении технических задач в инженерной практике. Изучение начертательной геометрии развивает пространственное и логическое мышление, необходимое в любой области инженерной деятельности, и особенно для конструктора и проектировщика.

При решении задач необходимо использовать приведенную ниже систему обозначений.

Принятые обозначения

1. Точки в пространстве: A, B, C, ..., 1, 2, 3, ...
2. Последовательность точек, фигур: $A_1, A_2, A_3, ..., A_j$.
3. Линии в пространстве: a, b, c, ..., h, f, p.
4. Плоскости, поверхности: **G**, γ, **D**, δ, **Q**, θ **S**, σ…, **Y**, ψ, **W**, ω….
5. Углы: ∠ABC, ∠A, α°, β°, ..., a⊥b, a⊥α.
6. Плоскости проекций: а) основные: Π_1, $\underline{\Pi_2}$, $\underline{\Pi_3}$, ...

   б) дополнительные: Π_1, $\overline{\Pi_2}$, ...
7. Оси проекций: x, y, z или x_{12}, x_{14}, x_{45} и т.п.
8. Начало координат O.
9. Проекции точек: A_1 на Π_1, A_2 на Π_2, A_3 на Π_3...
10. Проекции поверхностей, линий: $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ – плоскость,

    a_1, a_2, a_3 – прямая,

    ξ_1, ξ_2, ξ_3 – конус,

    $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3$ – цилиндр,

    ψ_1, ψ_2, ψ_3 – параболоид.
11. Расстояние между фигурами: $|A, B|$ – между точками A и B,

    $|A, a|$ – от точки до прямой,

    $|A, \alpha|$ – от точки до плоскости,

    $|a, \alpha|$ – от прямой до плоскости,

    $|a, b|$ – между прямыми,

    $|\alpha, \beta|$ – между плоскостями.
12. Прямая, отрезок, луч: (AB), [AB], [AB).
13. Центр проецирования: S.
14. Направление проецирования: s.

Символика

1. = совпадение, равенство: (AB) = a; $|AB| = |CD|$.
2. ≅ конгруэнтность: [AB] ≅ [CD].
3. ~ подобие: ΔABC ~ ΔDEF.
4. ?? параллельность: a ?? b.

5. $\perp$ перпендикулярность: $a \perp b$.

6. $\dot{-}$ скрещивание: $a \,\dot{-}\, b$.

7. $\overline{\cap}$ касание: $a \,\overline{\cap}\, \alpha$.

8. $\to$ отображение, проецирование: $B \to A_1B_1$ – AB проецируется в A_1B_1.

9. {...} множество: {m} – множество, состоящее из прямых m1, m2, m3, ..., mi; {A} – множество, состоящее из точек A1, A2, A3, ..., Ai.

10. $\in$ инцидентность, принадлежность: $A \in a$ – точка A принадлежит прямой a, или точка A лежит на прямой a, или A является элементом прямой a.

11. $\subset$ включение: $\subset a$ – плоскость α включает прямую a или плоскость α содержит прямую a.

12. $\cap$ пересечение фигур, множеств: $a \cap \alpha$ – прямая a пересекается с плоскостью α, $AB \cap CD$ – прямая AB пересекается с прямой CD.

13. $\cup$ объединение: $[ABCD]=[AB]\cup[BC]\cup[CD]$ – ломаная линия, состоящая из отрезков AB, BC, CD.

14. / отрицание знака: $\not\subset$ – не содержит,

$\not\perp$ – не перпендикулярна.

15. $\vee$ соответствует союзу «или»: $\alpha \vee \beta$ – α или β.

16. $\wedge$ соответствует союзу «и»: $p \wedge q$ – p и q.

17. $\Rightarrow$ следствие: «если..., то...» $a \parallel c \vee b \parallel c \Rightarrow a \parallel b$ – если две прямые параллельны третьей, то они параллельны между собой.

18. $\Leftrightarrow$ эквивалентность: $p \Leftrightarrow q$.

19. Q количество решений: Q=3 – задача имеет три решения.

Пример символической записи условия задачи и результата ее решения:

«Построить прямую b, проходящую через точку A и параллельную плоскости α»

$\{b:(b \in A \wedge b \parallel \alpha)\} = \alpha_1 \in A \wedge \alpha_1 \parallel \alpha$,

где b искомый элемент (прямая b);

$(b \in A \wedge b \parallel \alpha)$ – в круглых скобках записывается условие задачи;

{b:(...)} – результатом решения задачи является множество прямых b;

= – знак результата решения задачи,

$\alpha_1 \in A \wedge \alpha_1 \parallel \alpha$ – плоскость α_1 проходит через точку A и параллельна плоскости α.

Пример символической записи исследования:

1. $b \parallel a \Rightarrow Q = 1$ – если прямая b не параллельна плоскости α, то задача имеет одно решение;

2. $b \parallel a \Rightarrow Q = 0$, если прямая b параллельна плоскости α, то задача не имеет решений;

3. $b \subset \alpha \Rightarrow Q = \infty$ – если прямая b принадлежит плоскости α, то задача имеет бесчисленное множество решений.

Определители поверхностей:

$\psi((\bar{l}, \bar{a}, \bar{b}, \bar{\beta})\ [l_i \cap a \wedge l_i \cap b \wedge l_i \parallel \beta]$ – гиперболический параболоид ψ:

(...) – геометрическая часть определителя,

[...] – алгоритмическая часть определителя.

$k\left(\bar{l}, \bar{a}, \tilde{b}, \bar{\beta}\right)[l_i \cap a \wedge l_i \cap b \wedge l_i || \beta]$ – коноид k:

$\sigma(c_{O,R}; n)[r_{c,\, n\in O}]$ – сфера σ с центром в точке O и радиусом R, n – ось вращения, $r_{c,\, n\in O}$ – признак вращения окружности с вокруг оси n.

Обозначение поверхностей по результатам анализа условий задачи.

$A\in\alpha || \beta$ – плоскость α проходит через точку A и параллельна β,

$\beta_{D\in[AB]}$ – плоскость β проходит через точку D, середину отрезка AB,

$\alpha_{d(a\perp b)}$ – плоскость α проходит через биссектрису d угла $a\perp b$,

$\delta_{\alpha\perp\beta}$ – биссекторная плоскость угла $\alpha\perp\beta$,

$\xi_{A,\, n,\, l}$ – конус вращения с вершиной в точке A, с осью вращения n и образующей l,

$\xi_{A,\, c}$ – конус вращения с вершиной в точке A и окружностью c в основании,

$\zeta_{c,\, n;\, \alpha}$ – эллиптический цилиндр с круговым основанием c и осью n, расположенной под углом α к плоскости основания,

$\psi_{l;\, a,\, b;\, \beta}$ – косая плоскость (гиперболический параболоид) с образующей l, направляющими a и b и плоскостью параллелизма β,

Греческий алфавит

(Прописные и строчные буквы)

A, α – альфа	**I**, ι – йота	**R**, ρ – ро
B, β – бета	**K**, κ – каппа	**S**, σ – сигма
G, γ – гамма	**L**, λ – ламбда	
D, δ – дельта	**M**, μ – мю	
E, ε – эпсилон		**T**, τ – тау
Z, ζ – дзета		**U**, υ – ипсилон
	N, ν – ню	**F**, φ – фи
	X, ξ – кси	**C**, χ – хи

ЗАМЕТКИ

H, η – эта	**O**, ο – омикрон	**Y**, ψ – пси
Q, θ – тэта	**P**, π – пи	**W**, ω – омега

I. МЕТОД ПРОЕЦИРОВАНИЯ

Отображение геометрической фигуры на плоскости можно получить путем проецирования ее точек на эту плоскость.

1. Центральное проецирование

ЗАМЕТКИ

Сущность *центрального проецирования* заключается в том, что все проецирующие лучи проходят через одну и ту же точку называемую *центром проекций* (рис. 1).

Процесс человеческого зрения в геометрическом отношении совпадает с отражающей характеристикой центрального проецирования (оптический центр хрусталика – может считаться центром проекций, а участок задней стенки сетчатки – плоскостью проекций).

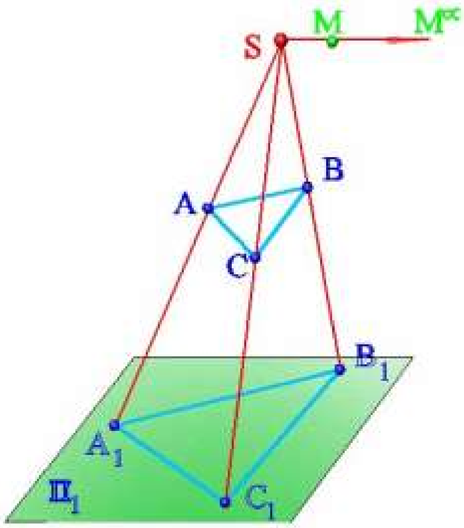


Рис. 1

Для того, чтобы построить изображение некоторой точки А, выбирается:

– произвольная плоскость $П_1$ – называемая *плоскостью проекций;*

– точка S, не лежащая в плоскость $П_1$ – называема *центром проекции.*

Операция проецирования состоит в том, что через точки А,В,С и S проводятся прямые до пересечения с плоскостью $П_1$.

Прямые S_1A, S_1B, S_1C – называются *проецирующими прямыми* или *проецирующими лучами*; A_1, B_1 и C_1 – точки пересечения проецирующего луча с плоскостью проекций $П_1$ – *центральной проекцией* точек А, В, С на плоскости $П_1$.

На плоскости $П_1$ можно построить центральные проекции всех точек пространства за исключением тех, которые лежат в плоскости, проходящей через центр проекций и параллельной $П_1$. В этом случае проецирующие лучи оказываются параллельными плоскости $П_1$. Луч на Рис.1 и точек пересечения луча с плоскость в обычном смысле нет.

Этот недостаток центрального проецирования устраняется дополнением евклидова пространства так называемыми бесконечно удаленными или несобственными элементами.

Значит проекции точки M, расположенной в плоскости, параллельной плоскости $П_1$, будет несобственная точка M^{∞}.

Методом центрального проецирования может быть построена проекция любой точки.

Реконструкция Евклидова пространства позволяет утверждать:

1) две прямые, лежащие в одной плоскости, всегда пересекаются в собственной или несобственной точке;
2) две любые плоскости пространства всегда пересекаются (линия пересечения собственная или несобственная прямая);
3) прямая и плоскость всегда пересекаются в собственной или несобственной точке.

Построение проекций (изображение чертежа) по заданному объекту называется *прямой задачей* начертательной геометрии.

Метод центрального проецирования позволяет решать ее однозначно: каждая точка имеет на плоскости $П_1$ единственную проекцию, так как проецирующая прямая пересекается с плоскостью $П_1$ в одной точке. Так, точка A имеет на плоскости $П_1$ единственную проекцию A_1; отрезок BC – проекцию B_1C_1.

Определение формы и размеров объекта по его чертежу называется *обратной задачей* начертательной геометрии.

Одна проекция точки не определяет ее положения в пространстве, так как может быть проекцией любой точки, лежащей на луче SA_1. Отрезок A_1B_1 проекции любой линии, лежащей в проецирующей плоскости, определяемой точкой S и прямой AB.

Следовательно, одна проекция оригинала не позволяет судить о форме и размерах оригинала, то есть однопроекционный чертеж является *необратимым.*

2. Параллельное проецирование

Параллельное проецирование – если все проецирующие лучи параллельны между собой (рис. 2).

Параллельное проецирование можно рассматривать как частный случай центрального, когда центр проекций S удален в бесконечность. Проецирующие лучи окажутся параллельными друг другу и выбранному направлению проецирования.

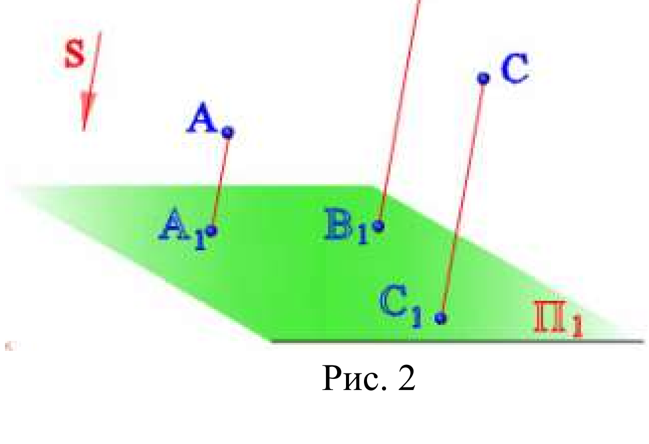


Рис. 2

Чтобы получить *параллельные проекции* точек, необходимо выбрать:

плоскость проекций – $П_1$;

направление проецирования – S.

Точки A_1, B_1, C_1 – пересечения проецирующих лучей с плоскостью проекции $П_1$, называются *параллельными проекциями* точек A, B, C на плоскости $П_1$.

Однопроекционный чертеж, полученный методом параллельного проецирования тоже необратим.

Параллельное проецирование получило наибольшее распространение благодаря простоте построения изображения и сохранению ряда свойств оригинала. Рассмотрим эти свойства.

Основные инвариантные (независимые) свойства параллельного проецирования

Геометрические фигуры проецируются на плоскость проекции в общем случае с искажением. Происходит искажение линейных и угловых величин. Свойства геометрических фигур, которые не изменяются в процессе проецирования называют инвариантными.

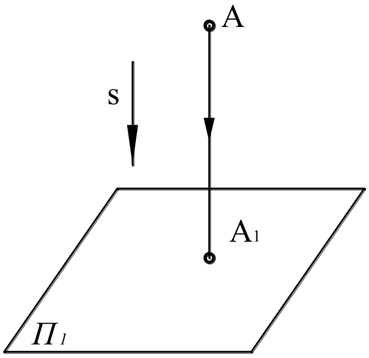


Рис. 3

1. Проекцией точки является точка (рис. 3).

Доказательство: проецирующий луч – прямая, а прямая пересекает плоскость только в точке (из определения точки).

2. Проекцией прямой в общем случае является прямая (рис. 4).

Дано: прямая АВ, плоскость проекции $П_1$, направление проецирования S.

Доказательство: для построения проекции прямой проведем проецирующие лучи из точек А, В прямой. Все они лежат в одной проецирующей плоскости, параллельно направлению проецирования S. Прямая A_1B_1 пересечения плоскости A_1ABB_1 с плоскостью проекций $П_1$ и является проекцией прямой АВ (плоскости пересекаются по прямой линии). AA_1BB_1 – проецирующая плоскость.

Это свойство называется свойством *прямолинейности*. Следовательно, для построения проекции прямой достаточно построить проекции двух ее точек.

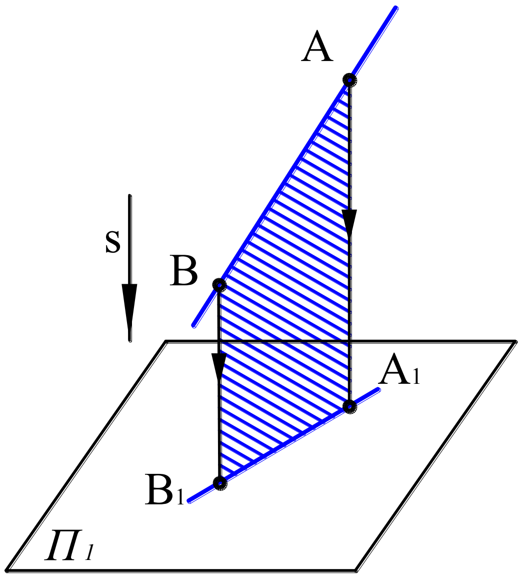


Рис. 4

3. Проекция точки, принадлежащей прямой лежит на проекции этой прямой (рис. 5).

Это свойство, называемое свойством *принадлежности*, вытекает непосредственно из предыдущего.

Доказательство: прямая АВ и проецирующие лучи образуют плоскость A_1AB_1B. Точка С принадлежит прямой АВ, следовательно, и плоскости A_1AB_1B.

Проецирующий луч CC_1 и проекция C_1 также при-

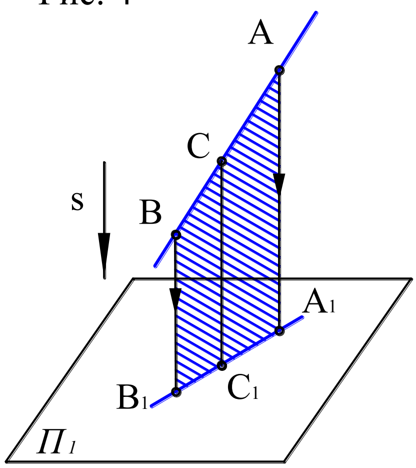


Рис. 5

надлежат этой плоскости, значит они пересекутся в точке C_1, принадлежащей проекции A_1B_1 прямой AB.

4. Если прямая параллельна направлению проецирования, то ее проекция вырождается в точку (рис. 6).

$MN \parallel S \Rightarrow M_1=N_1$

Проекции всех точек прямой MN на $П_1$ совпадают.

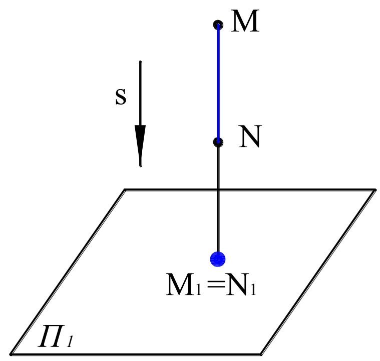


Рис. 6

5. Если отрезок прямой параллелен плоскости проекции, то он проецируется на нее в истинную величину (рис. 7).

Доказательство: проекция K_1L_1 отрезка KL равна самому отрезку, так как фигура KLK_1L_1 – параллелограмм.

$KL \parallel П_1 \rightarrow K_1L_1 = KL$

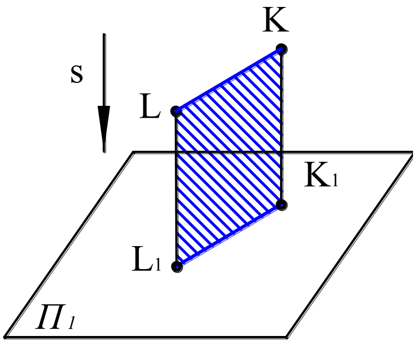


Рис. 7

6. Проекции параллельных прямых параллельны (рис. 8).

Дано: $l \parallel m$.

Доказательство: плоскость ABA_1B_1 параллельна плоскости CDC_1D_1, так как $AB \parallel CD$ и проецирующие лучи AA_1; BB_1; CC_1; DD_1 параллельны между собой. Две пересекающиеся прямые AA_1 и l плоскости ABB_1A_1 параллельны двум прямым CC_1 и m плоскости CDD_1C_1.

Плоскость проекции $П_1$ пересекает параллельные плоскости по параллельным прямым, то есть $A_1B_1 \parallel C_1D_1$.

$AB \parallel CD \Rightarrow A_1B_1 \parallel C_1D_1$

Это свойство называется *свойством сохранения* параллельности.

7. Отношение отрезков параллельных прямых равно отношению их проекций (см. рис. 8).

Дано: AB и CD – отрезки прямых l и m.

A_1B_1 и C_1D_1 – их проекции на $П_1$

Доказать: $\frac{AB}{CD}=\frac{A_1B_1}{C_1D_1}$

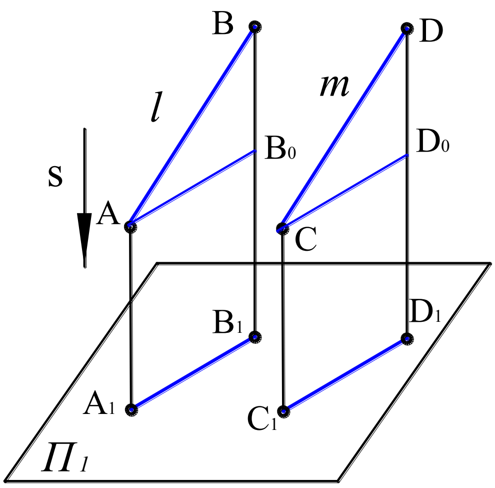


Рис. 8

Доказательство: (см. Рис.8) проведем в проецирующих плоскостях прямые AB_0 и CD_0 и $A_1B_1 \parallel C_1D_1$. Треугольники ABB_0 и CDD_0 подобны, так как сходственные стороны параллельны. Следовательно, соответственные углы равны.

Из подобия треугольников получим: $\frac{AB}{CD}=\frac{AC_0}{CD_0}$, но $AB_0 = A_1B_1$ и $CD_0 = C_1D_1$

Сделав подстановку: $\frac{AB}{CD}=\frac{A_1B_1}{C_1D_1}$

Следствие: если точка делит прямую в каком-то отношении, то ее проекция делит проекцию прямой в том же отношении – *свойство сохранения отношения отрезков* (рис. 8).

8. Проекция фигуры не меняется при параллельном переносе плоскости проекции (рис. 9).

Дано: Δ ABC, его проекция $A_1B_1C_1$ на плоскость $П_1$.

Переместим плоскость $П_1$ параллельно самой себе в положение $П^{/1}$и построим проекцию $A_1^{/}B_1^{/}C_1^{/}$ треугольника ABC на плоскость $П_1^{/}$.

Очевидно, что $A_1A_1' = B_1B_1' = C_1C_1'$ как отрезки параллельных прямых, заключенные между параллельными плоскостями. Следовательно, четырехугольники $A_1B_1B_1^{/}A_1^{/}$; $B_1C_1C_1^{/}B_1^{/}$; $A_1C_1C_1^{/}A_1^{/}$– параллелограммы, поэтому треугольники $A_1B_1C_1$ и $A_1^{/}B_1'C_1^{/}$ равны.

Это свойство позволяет не фиксировать плоскости проекции и является основой безосного способа изображения.

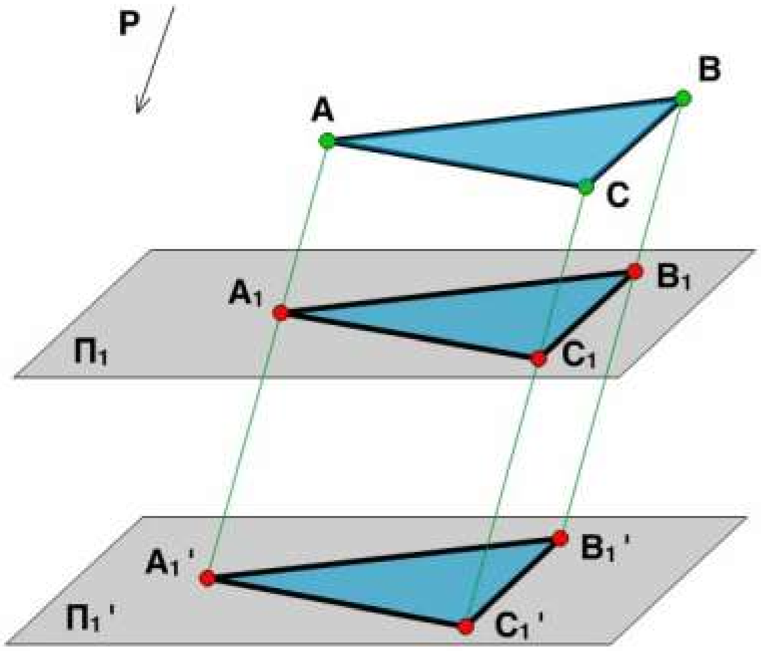


Рис. 9

ЗАМЕТКИ

3. Прямоугольное (ортогональное) проецирование

Если направление проецирования перпендикулярно плоскости проекции, проецирование называется *ортогональным* (прямоугольным). Если $S \perp П_1 \rightarrow AA_1 \perp П_1$. В этом случае проекция $A_{1,}$ точки А, называется ортогональной проекцией.

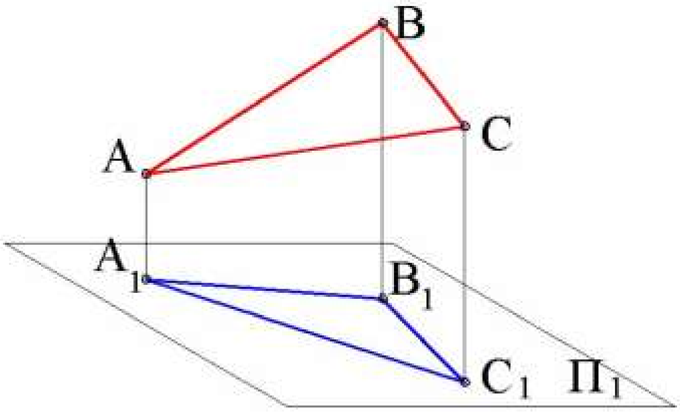


Рис. 10

Ортогональное проецирование является частным случаем параллельного, значительно упрощает построение проекции предметов и является основным при выполнении комплексных чертежей.

Для того чтобы чертеж был, обратим, существует несколько способов дополнения однопроекционных чертежей вторичными элементами. В технике получили наибольшее распространение следующие виды обратимых чертежей:

1) комплексные чертежи в ортогональных проекциях;
2) аксонометрические чертежи;
3) перспективные чертежи;
4) чертежи в проекциях с числовыми отметками.

ПРЯМОУГОЛЬНАЯ СИСТЕМА КООРДИНАТ

Рассмотрим пространственную модель координатных плоскостей проекций. Для определения положения геометрической фигуры в пространстве и выявления её формы по ортогональным проекциям наиболее удобной является декартова система координат. Декартова система координат состоит из трёх взаимно перпендикулярных плоскостей.

$П_1$ – Горизонтальная плоскость проекций

$П_2$ - Фронтальная плоскость проекций

$П_3$ - Профильная плоскость проекций

Координатные плоскости делят пространство на восемь частей, которые называются октантами, их нумерация показана на рисунке.

Линии пересечения плоскостей проекций образуют оси координат: **X** - ось абсцисс, **Y** - ось ординат, **Z** - ось аппликат, а точка пересечения координатных осей **O** принимается за начало координат.

II. КОМПЛЕКСНЫЙ ЧЕРТЕЖ ТОЧКИ

Наибольшее применение в технической практике получил чертеж, составленный из двух и более связанных между собой ортогональных проекций изображаемого предмета. Такой чертеж называется *комплексным чертежом.*

Принцип образования такого чертежа состоит в том, что данный предмет проецируется ортогонально на две взаимно-перпендикулярные плоскости проекций, которые затем соответствующим образом совмещают с плоскостью чертежа (рис. 11).

Одна из плоскостей $П_1$ располагается горизонтально и *называется горизонтальной плоскостью проекций.* Плоскость $П_2$ располагается вертикально, эта плоскость расположена перед наблюдателем, ее называют *фронтальной плоскостью проекций.* Прямую пересечения плоскостей проекций называют *осью проекций* $X=П_2 \cap П_1$.

Две взаимно-перпендикулярные плоскости пространства делят его на *четыре четверти.*

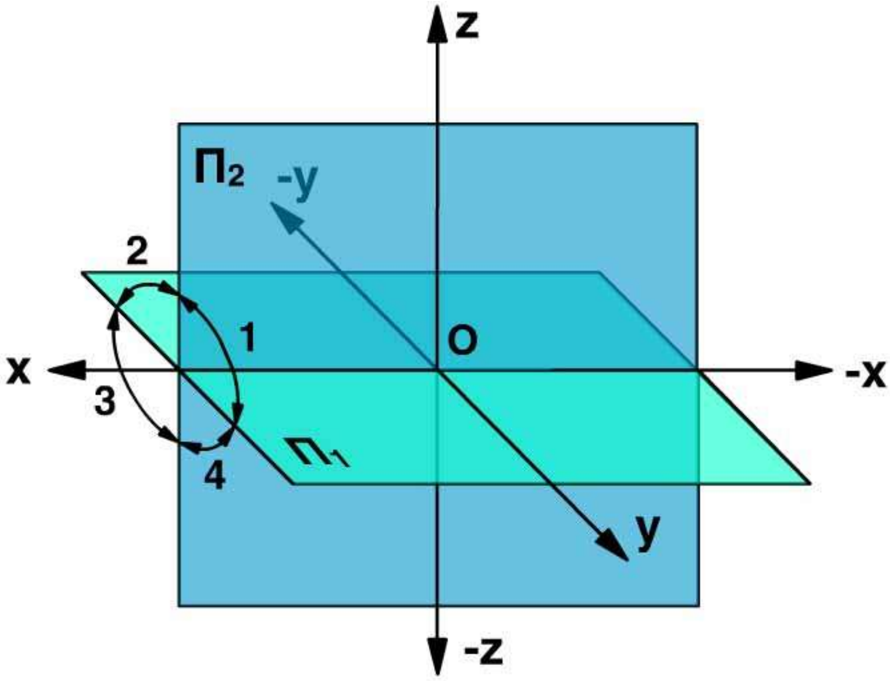


Рис. 11

1. Комплексный чертеж точки на две плоскости проекций

Спроецируем ортогонально на плоскости проекций $П_1$ и $П_2$ какую-нибудь точку А и получим две ее проекции: горизонтальную проекцию A_1 на плоскости $П_1$, фронтальную проекцию A_2 на плоскости $П_2$ (рис. 12).

Проецирующие прямые AA_1 и AA_2 пи помощи которых точка А проецируется на плоскость проекций, определяет проецирующую плоскость A_1AA_2 перпендикулярную к обеим плоскостям проекций и к оси проекций X. Прямые A_XA_1 и A_XA_2 являющиеся проекциями проецирующей плоскости на плоскостях проекций $П_1$ и $П_2$ будут перпендикулярны к оси проекций X.

ЗАМЕТКИ

Обратно, каждая пара точек A_1 и A_2 соответственно принадлежащих плоскостям $П_1$ и $П_2$ (А принадлежит $П_1$; A_2 принадлежит $П_2$) и расположенных на перпендикулярных к O_X, восстановленных из одной и той же точки A_X, определяет в пространстве единственную точку А. Следовательно, проекции некоторой точки получаются расположенными на прямых, перпендикулярных к оси проекций и пересекающих эту ось в одной и той же точке.

Если даны проекции A_1 и A_2 некоторой точки А, то, проведя перпендикуляры через A_1 к плоскости $П_1$ и через A_2 к плоскости $П_2$, получим в пересечении этих перпендикуляров определенную точку.

Итак, две проекции точки вполне определяют ее положение в пространстве относительно данной системы плоскостей проекций.

Расстояние A_1A точки А от горизонтальной плоскости проекций называется высотой точки А, ее расстояние A_2A от фронтальной плоскости проекций – глубиной точки А.

Повернув плоскость $П_1$ вокруг оси проекций на угол 90^0 получим одну плоскость – плоскость чертежа (рис. 13), проекции A_1 и A_2 расположатся на одном перпендикуляре к оси проекций X – на линии связи (линия соединения двух проекций точки называется линией связи). В результате получим комплексный чертеж точки А, состоящей из двух проекций A_1 и A_2 точки А.

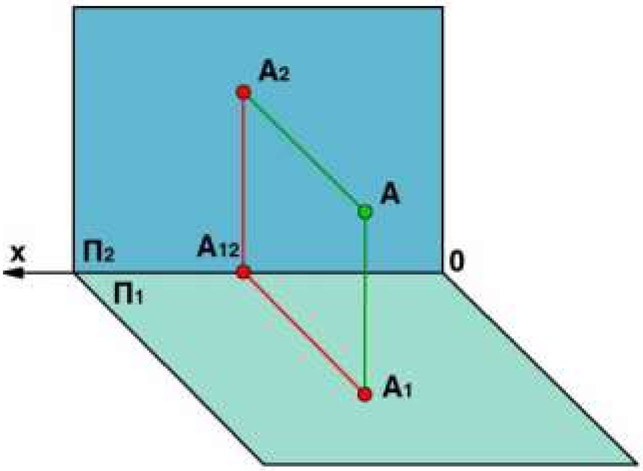


Рис. 12

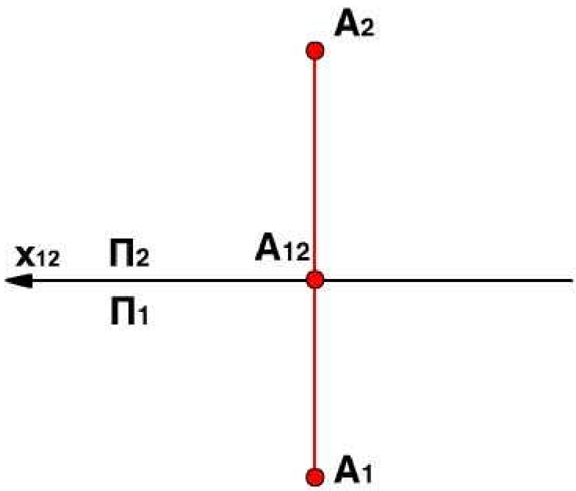


Рис. 13

Полученный комплексный чертеж будет обратимым чертежом, то есть по это
му чертежу можно определить или, как говорят, реконструировать оригинал.

В самом деле, рассматривая, например фронтальную проекцию A_2 точки А и имея на чертеже ее глубину A_XA_1 можно реконструировать точку А. Для этого надо восстановить перпендикуляр к плоскости чертежа в его точке A_2 и от плоскости чертежа отложить глубину искомой точки, тогда конец перпендикуляра определит положение точки А.

ЗАМЕТКИ

Следует обратить внимание на необходимость проведения линии связи между проекциями точки: только при наличии этой линии, взаимосвязывающей проекции, получается возможность установить положение определяемой ими точки.

2. Комплексный чертеж точки в системе трех плоскостей проекции

В ряде построений и при решении задач оказывается необходимым вводить в систему Π_1, Π_2 и другие плоскости проекций. Известно, что в практике составления чертежей, например машин и их частей, чертеж преимущественно содержит не два, а большее число изображений.

Рассмотрим введение в систему Π_1, Π_2 еще одной плоскости проекций. Обозначенная Π_3 плоскость перпендикулярна к Π_1 и к Π_2, ее называют *профильной плоскостью проекций* (рис. 14).

Так же, как и Π_2 плоскость Π_3 расположена вертикально. Помимо оси X появляются еще оси Y и Z, перпендикулярные к X. Буквой O (origo – начало) обозначена точка пересечения всех трех осей проекций.

$X = \Pi_2 \cap \Pi_1$ – ось абсцисс (отсеченная, отдаленная)

$Y = \Pi_1 \cap \Pi_3$ –ось ординат (подряд проведенная)

$Z = \Pi_2 \cap \Pi_3$ – ось аппликат (приложенная)

Плоскости проекций делят пространство на 8 частей – октантов.

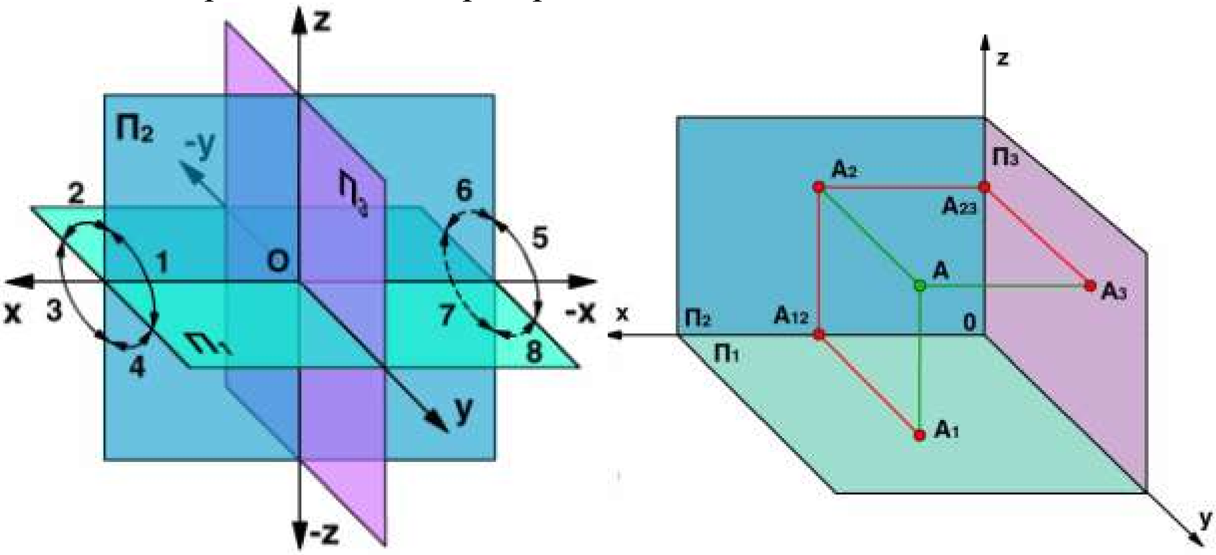


Рис. 14

Π_1 – горизонтальная плоскость проекции

Π_2 – фронтальная плоскость проекции

Π_3 – профильная плоскость проекции

A_1 – горизонтальная проекция точки A.

A_2 – фронтальная проекция точки A.

A_3 – профильная проекция точки A.

A_1A_2 – вертикальная линия связи

A_2A_3 – горизонтальная линия связи

* Расстояние точки A от горизонтальной плоскости Π_1 называется высотой точки A.

$A_1A = A_2A_X = z$ (аппликата)

* Расстояние точки A от фронтальной плоскости проекций Π_2 называется глубиной точки A.

$A_2A = A_1A_{X12} = y$ (ордината)

* Расстояние точки A от профильной плоскости проекций Π_3 называется широтой точки A.

$A_3A = A_1A_{Z23} = x$ (абсцисса)

Приводим систему к плоскому виду.

Чтобы иметь возможность точного построения комплексного чертежа объекта необходимо задавать положение проекции точки при помощи чисел, то есть координат (рис. 15). Для отношения точки A к системе координат OXYZ нужно построить комплексный чертеж проекции координатных осей; спроецировать точку A на координатные плоскости.

Прямоугольные координаты точки – это числа, выражающие ее расстояние от трех взаимно-перпендикулярных плоскостей – плоскостей координат. Положение точки A относительно системы плоскостей ($П_1$, $П_2$, $П_3$) определим опустив из точки A перпендикуляр на плоскости проекций.

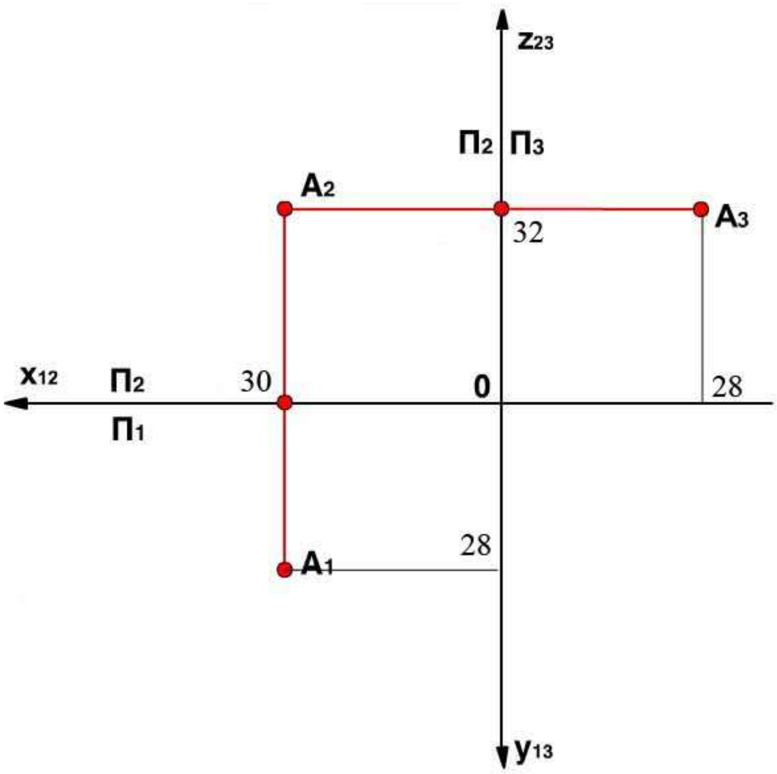


Рис. 15

III. ПОСТРОЕНИЕ ПРОЕКЦИИ ФИГУР НА БЕЗОСНЫХ ЧЕРТЕЖАХ

Мы выяснили, что ось на чертеже играет, таким образом, роль линии или базы отсчета расстояний точки до вполне определенных, фиксированных плоскостей проекций. В технической практике, однако, в этом нет необходимости, так как для определения формы и размеров предмета важно знать лишь относительное расположение отдельных ее точек. Поэтому при построении чертежа можно плоскости проекций не фиксировать. Основанием для этого является свойство параллельного проецирования: *проекция фигуры не изменяется при параллельном переносе плоскости проекций*.

Ось проекций становится при этом неопределенной и на чертеже не наносится. Такой чертеж называется *безосным.*

Положение осей проекции становится неопределенным и поэтому их на комплексном чертеже не показывают. Неопределенным становятся и координаты точек фигуры (рис. 16а).

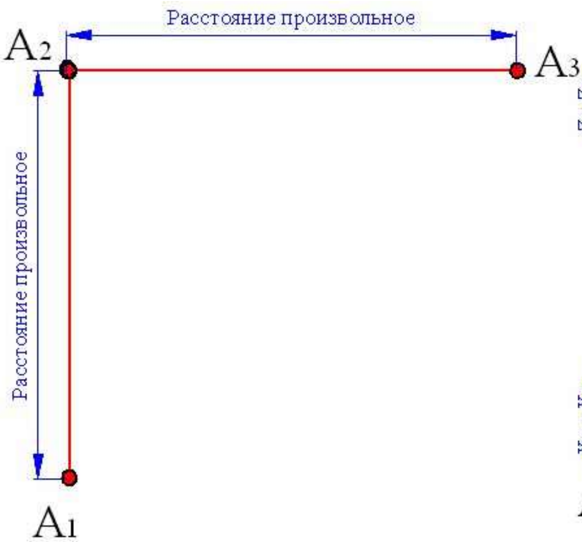
В этом случае для построения комплексного чертежа следует использовать разности их координат, которые не зависят от положения плоскостей проекции.

Условия связи между проекциями точек фигуры остаются те же, что и при основном способе изображения.

При этом одна из точек фигуры принимается за базовую и ее проекции строят так, как показано.

Затем по разности координат строят проекции вспомогательных ее точек. Для построения профильных проекций точек проводят линию преломления прямого угла или постоянную прямую комплексного чертежа. $К_0$ под $\angle 45^0$.

Пример: Построить безосный комплексный чертеж точек: А (35; 40; 30); В (20; 15; 15) (рис. 16б).



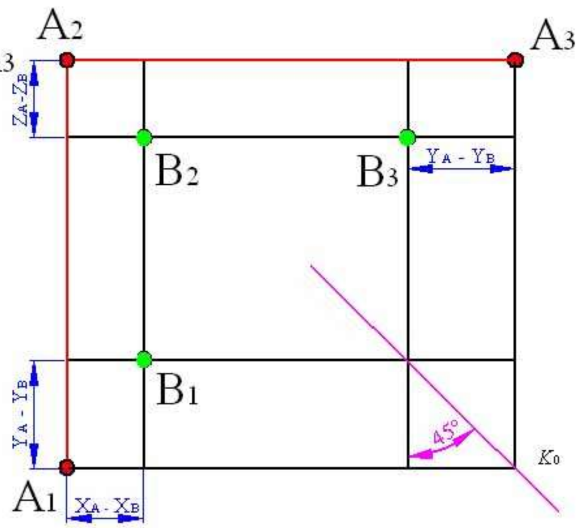


Рис. 16 а   Рис. 16б

Решение:

1. Подсчитаем разность координат точек А и В:

$|X_A – X_B|$ = 35 – 20 = 15;

$|У_A – У_B|$ = 40 – 15 = 25;

$|Z_A – Z_B|$ = 30 – 15 = 15.

2. Строят произвольно проекции точки А – $А_1$, $А_2$, $А_3$ – на таком расстоянии другой, чтобы не было наложения одного поля проекции на другое.

3. Проводят прямую преломления линии связи $К_0$.

4. Проводят вторую вертикальную линию связи на расстоянии $(Х_А – Х_В) = 15$ см. От первой линии связи $А_1А_2$.

5. Отмечают на ней фронтальную проекцию $В_2$ точки В на расстоянии $|Z_A – Z_B|$ = 15 от горизонтальной линии связи $[А_2А_3]$.

6. Строят на той же линии горизонтальную проекцию $В_1$ точки В на расстоянии $|У_A – У_B|$ = 25 от проекции точки $А_1$.

7. При помощи прямой преломления $К_0$ строят профильную проекцию $В_3$ точки В.

IV. КОМПЛЕКСНЫЕ ЧЕРТЕЖИ ПРЯМЫХ

Известно, что две точки определяют прямую, следовательно, для задания прямой необходимо и достаточно задавать две ее точки.

1. Прямая общего положения

Прямая может занимать в пространстве различные положения относительно плоскостей проекций.

Прямая не параллельная и не перпендикулярная ни одной из плоскостей проекции (наклонная ко всем) называется *прямой общего положения.*

Из второго свойства параллельного проецирования: *проекцией прямой линии является прямая.* Прямая (AB) общего положения находится на пересечении двух проецирующих плоскостей проекций (рис. 17).

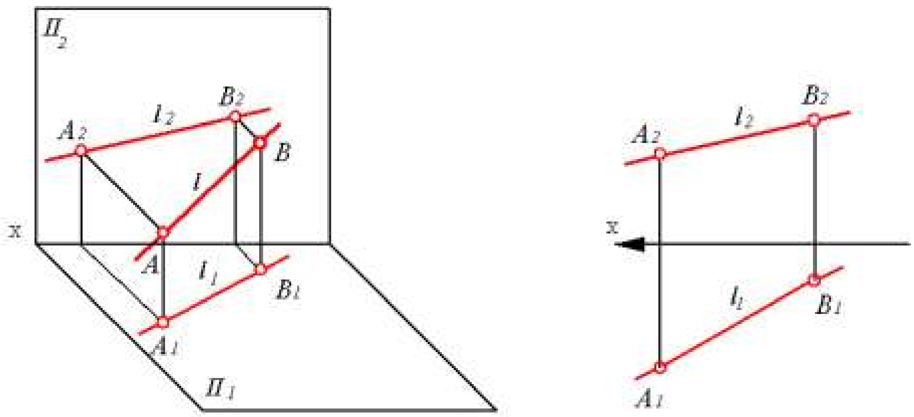


Рис. 17

Очевидно, что в двух плоскостях проекций $\frac{\Pi_2}{\Pi_1}$ прямая (AB) будет иметь две проекции (A_1B_1) и (A_2B_2).

Две проекции прямой общего положения определяют ее положение в пространстве, так как каждая точка прямой имеет две проекции. Построение проекции прямой линии можно свести к построению двух ее точек.

Если прямая по мере удаления от наблюдателя поднимается вверх, то такую прямую называют *восходящей* (см. Рис.17). Проекции восходящей прямой ориентированы одинаково.

Если прямая по мере удаления от наблюдателя понижается, такую прямую называют *нисходящей*. Проекции нисходящей прямой ориентированы противоположно (рис. 18).

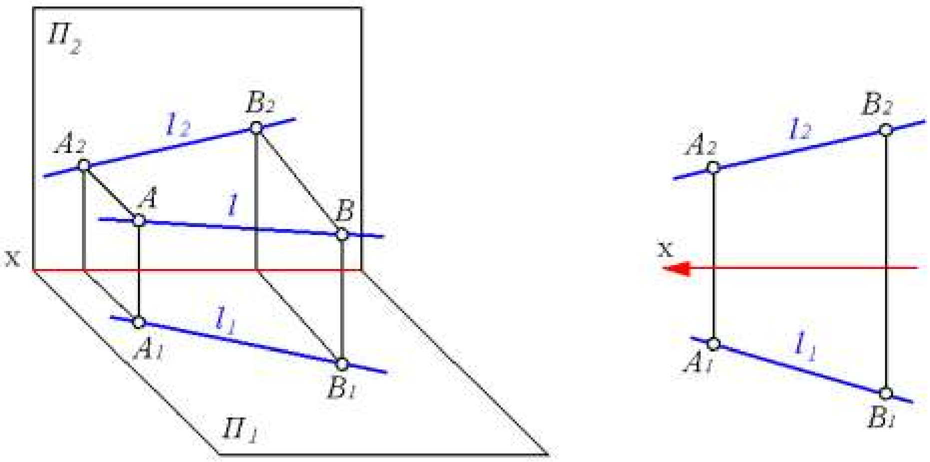


Рис. 18

2. Следы прямой линии

Следом прямой линии называется точка, в которой прямая пересекается с плоскостью проекций (рис. 19). Так как след прямой принадлежит плоскости, то одна из координат каждого следа должна быть равна нулю. Горизонтальный след точки M $Z_M = 0$, фронтальный след $У_N = 0$ (точка N).

Для построения горизонтального следа M прямой необходимо продолжить ее фронтальную проекцию до пересечения с O_X, восстановить перпендикуляр до пересечения с горизонтальной проекцией прямой.

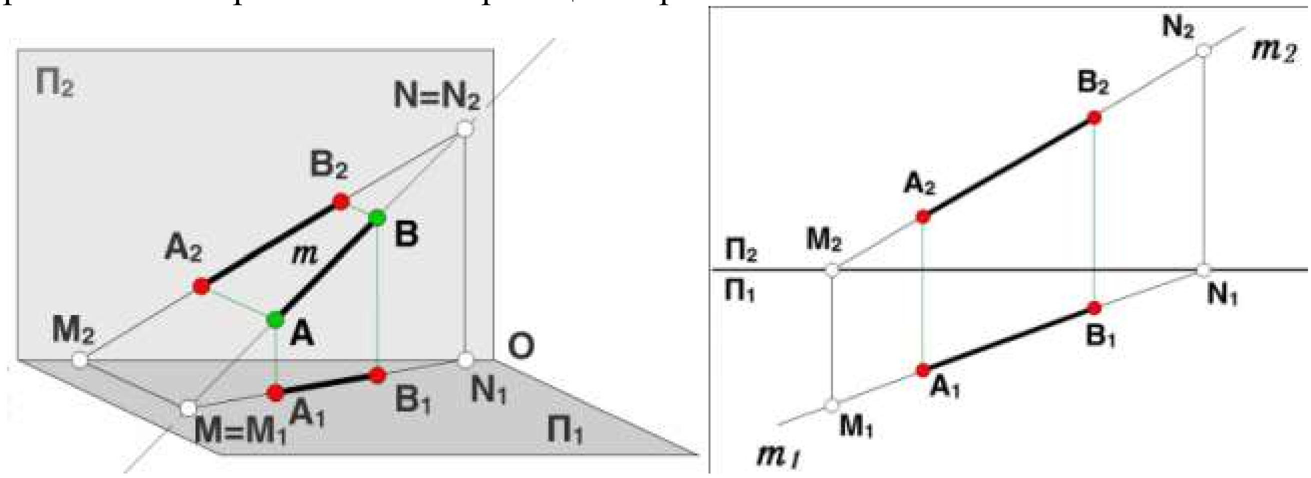


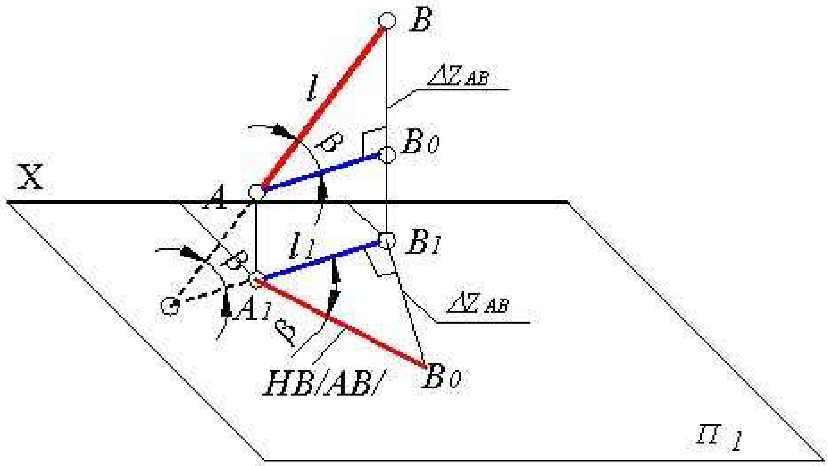
Рис. 19

3. Определение натуральной величины отрезка способом прямоугольного треугольника

Проекция отрезка прямой общего меньше его действительной величины.

Построим ортогональную проекцию A_1B_1 отрезка AB на плоскости $П_1$ (рис. 20). Проведем прямую AB_0 параллельную A_1B_1. Треугольник ABB_0 – прямоугольный. Один его катет AB_0 равен A_1B_1. А второй катет BB_0 равен разности высот концов отрезка ($BB_0 = Z_B - Z_A$). Отрезок [AB] является гипотенузой этого треугольника, а $\angle\beta$ – углом наклона отрезка AB к горизонтальной плоскости проекций. Треугольник, равный данному, можно построить на горизонтальной плоскости проекций. A_1B_0' – натуральная величина отрезка AB.

Строим комплексный чертеж (рис. 21).



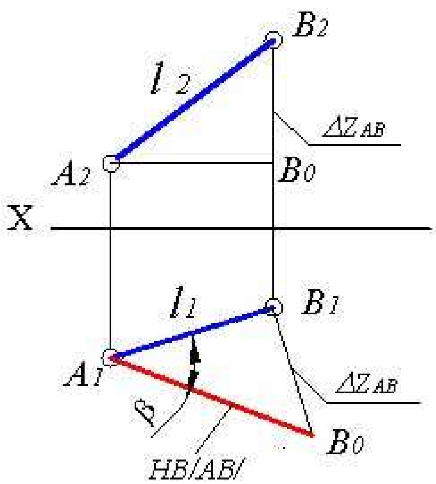


Рис. 20 Рис. 21

Приняв за один катет горизонтальную проекцию A_1B_1 отрезка АВ, строим прямоугольный треугольник $A_1B_1B_0$. Отрезок B_1B_0 равен разности высот точек А и В. $B_1B_0 = Z_B - Z_A$, $A_1B_0 = AB$, $\angle\beta$ – угол наклона к плоскости Π_1

Натуральная величина отрезка может быть определена как гипотенуза прямоугольного треугольника, одним катетом которого является горизонтальная проекция A_1B_1, а вторым катетом – разность высот точек А и В. $B_1B_0 = Z_B - Z_A$, $A_1B_0 = AB$, $\angle\beta$ – угол наклона АВ к Π_1.

Или *натуральная величина* отрезка может быть определена как гипотенуза прямоугольного треугольника, одним катетом которого является фронтальная проекция A_2B_2, а вторым катетом – разность глубин точек А и В. $A_2A_0 = У_B - У_A$, $\angle\alpha$ – угол наклона АВ к Π_2.

4. Частные случаи расположения прямой

1. Линия уровня.

Линия уровня – прямая параллельная одной из плоскостей проекций.

1.1 *Горизонталь* – прямая параллельная горизонтальной плоскости проекции, обозначается – h (рис. 22).

Ее горизонтальная проекция h_1 занимает положение, соответствующее положению самой горизонтали в пространстве. Фронтальная проекция горизонтали параллельна оси X или перпендикулярна линиям связи, так как все точки горизонтали удалены на одинаковое расстояние от Π_1 $Z_A - Z_B = 0$.

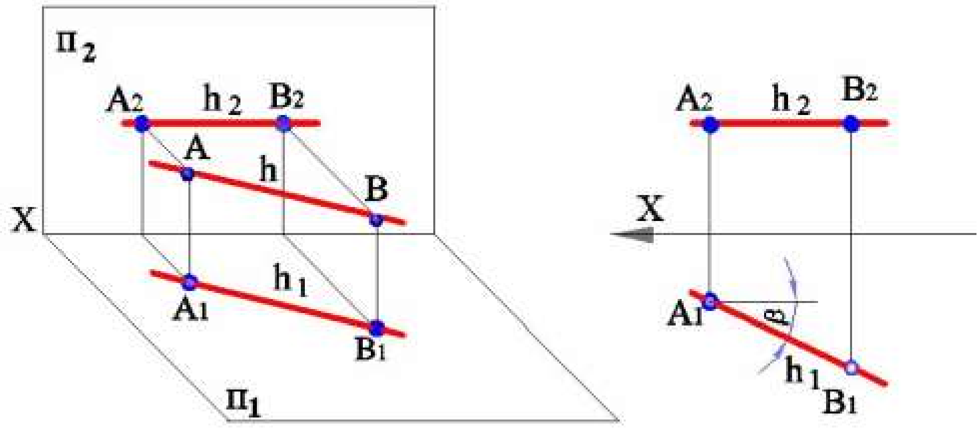


Рис. 22

Отрезок АВ горизонтали h и угол наклона ($\angle\beta$) ее к плоскости Π_2 проецируется на Π_1 в истинную величину.

1.2 *Фронталь* – пряма параллельная фронтальной плоскости проекции, обозначается – f (рис. 23).

Ее фронтальная проекция f_2 занимает положение, соответствующее положению самой фронтали в пространстве, а горизонтальная проекция – любой фронтали параллельной оси X или перпендикулярной линии связи, так как все точки фронтали одинаково удалены от Π_2: $У_C - У_D = 0$.

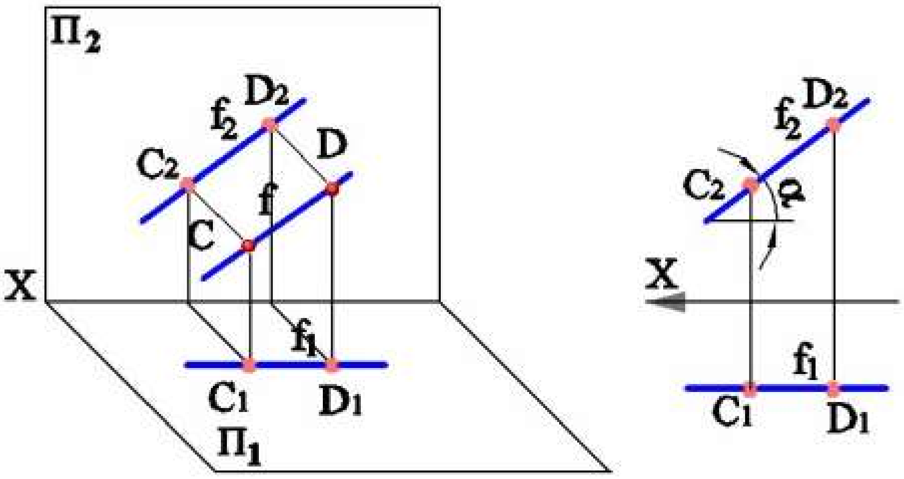


Рис. 23

Профильная проекция $f_3 || Z$; $CD = C_2D_2$; $Y_C - Y_D = 0$; $Y = const$; $\angle\alpha$ – угол наклона к $П_1$.

1.3 *Профильная прямая* – прямая параллельная профильной плоскости проекций (рис. 24). Обозначается буквой ρ. Ее профильная проекция занимает положение соответствующее положению самой профильной прямой в пространстве. Горизонтальная проекция ρ_1 параллельна оси У, фронтальная ρ_2 параллельна оси Z, так как все точки профильной прямой одинаково удалены от $П_3$: $X_K - X_L = 0$; $X = const$; $\rho_2 || Z$; $\rho_1 || У_1$; $\rho_3 || П_3$; $\angle\beta$ – угол наклона к $П_1$; $\angle\alpha$ – угол наклона к $П_2$.

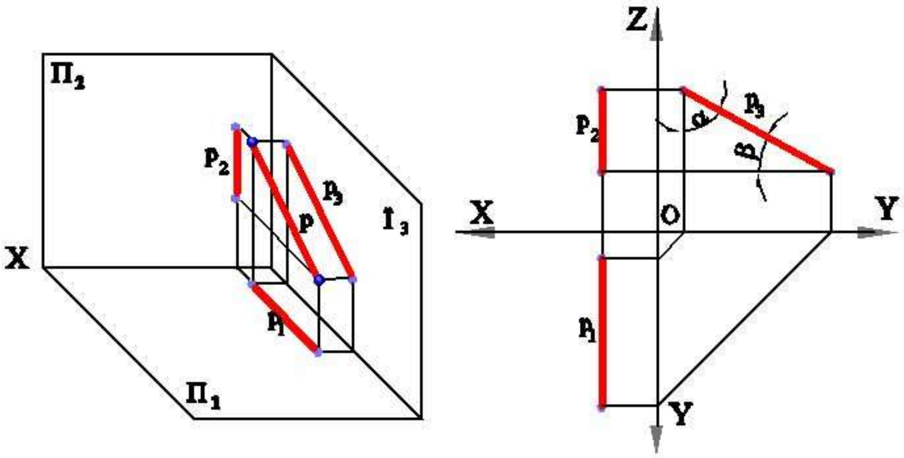


Рис. 24

Отрезок KL профильной прямой ρ и углы наклона α и β наклона к $П_1$ и $П_2$ проецируются на $П_3$ в истинную величину.

2. Проецирующие прямые.

Проецирующие прямые – прямые перпендикулярные какой-либо плоскости проекций.

2.1 *Горизонтально-проецирующая прямая* – прямая перпендикулярная горизонтальной плоскости проекций (рис. 25). Горизонтальная проекция этой прямой вырождается в точку. Фронтальная и профильная проекция прямой параллельной оси Z или вертикальной линии связи.

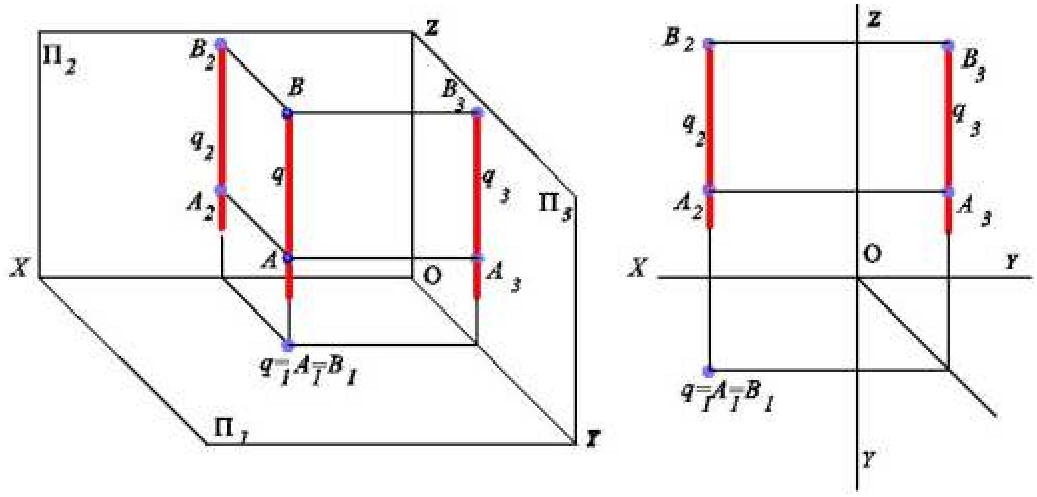


Рис. 25

Прямая параллельна одновременно $П_2$ и $П_3$, следовательно на эти плоскости она проецируется без искажения: $AB = A_2B_2 = A_3B_3$; $q \perp П_1$, q_1 – точка; q_2, $q_3 \,||\, Z$.

Точки, лежащие на одной проецирующей прямой называются *конкурирующими* относительно соответствующей плоскости проекций.

Точки А и В – горизонтально-конкурирующие. Конкурирующие точки применяются для определения видимости геометрических образов на комплексном чертеже.

2.2 *Фронтально-проецирующая прямая* – прямая перпендикулярная фронтальной плоскости проекций. Фронтальная проекция прямой вырождается в точку, а

горизонтальная и профильная проекция параллельна оси У (рис. 26). Фронтально-проецирующая прямая параллельна одновременно $П_1$ и $П_3$, следовательно, на эти плоскости она проецируется без искажения: $CD = C_1D_1 = C_3D_3$; $m \perp П_2$; m_1 – точка; $m_1, m_3 \,||\, У$. Точки C и D фронтально-конкурирующие.

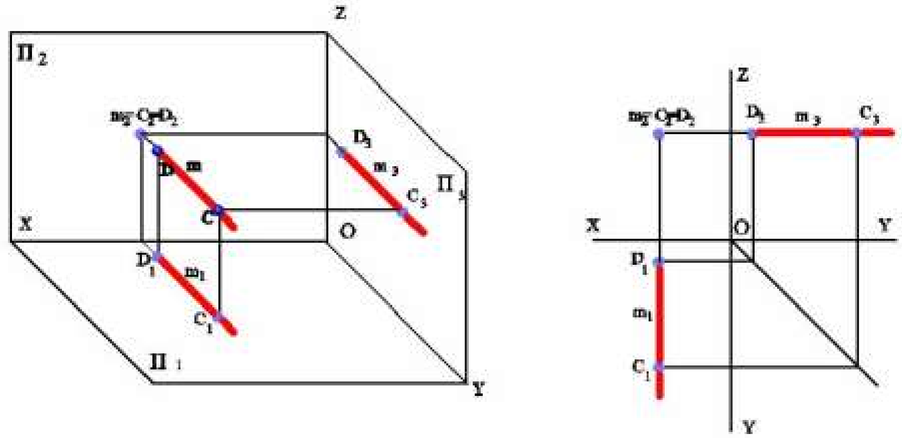


Рис. 26

2.3 *Профильно-проецирующая прямая* – прямая перпендикулярная профильной плоскости проекций ($n \perp П_3$). Профильная проекция этой прямой вырождается в точку, а горизонтальная и фронтальная проекции параллельны оси X (рис. 27). $EF = E_2F_2 = E_1F_1$; точки E и F – профильно-конкурирующие: $n_3 = E_3 = F_3$; n_3 – точка; $n_1 \,||\, X$; $n_2 \,||\, X$.

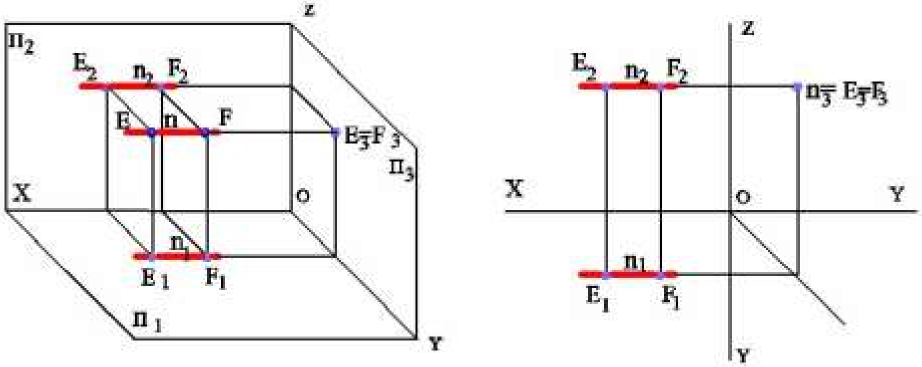


Рис. 27

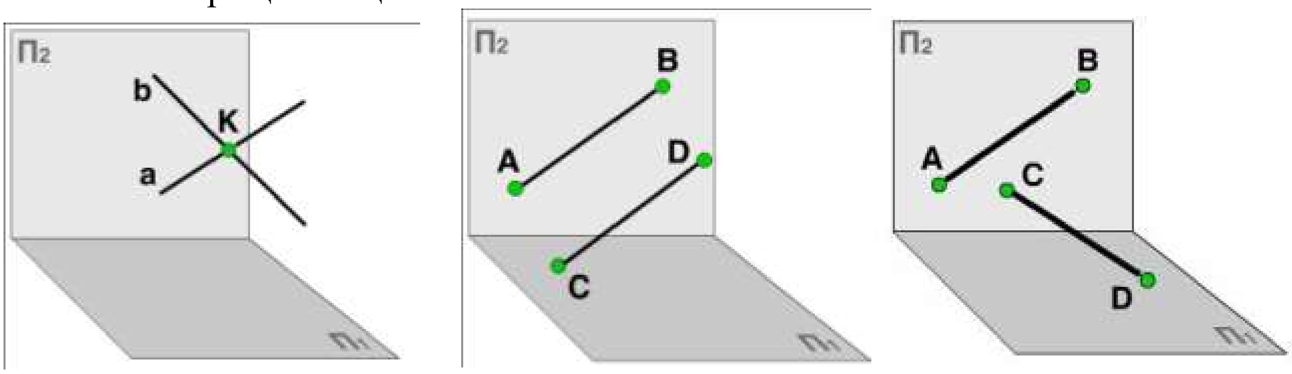
5. Относительное положение двух прямых

Две прямые в пространстве могут:

– пересекаться;

– быть параллельными;

– быть скрещивающимися.



1. *Параллельные прямые* (рис. 28).

Если прямые a и b параллельны, то их одноименные проекции параллельны, то есть, если $a \| b$, то $a_1 \| b_1 \wedge a_2 \| b_2$.

Для прямых общего положения справедливо и обратное уравнение: если $a_1 \| b_1 \wedge a_2 \| b_2$, то $\rightarrow a \| b$.

Таким образом, чтобы определить по чертежу параллельность двух прямых общего положения, достаточно иметь любую пару проекций данных прямых.

2. *Прямые пересекаются (рис. 29).*

Две прямые, имеющие одну общую точку, называются *пересекающимися.*

Если прямые c и d пересекаются, то на основании принадлежности точки K их пересечения одновременно прямым c и d проекции K_1 и K_2 точки K должны принадлежать одноименным проекциям прямых, то есть быть точками пересечения соответствующих проекций: $K_1 = c_1 \cap d_1$, $K_2 = c_2 \cap d_2$.

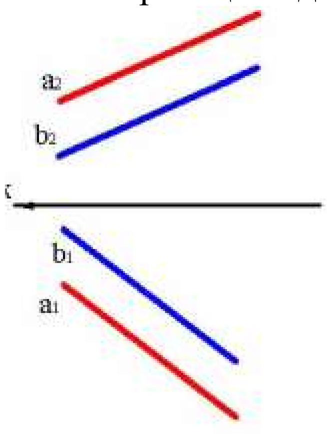
Очевидно, что K_1 и K_2 лежат на одной линии связи. Обратное утверждение так же справедливо: если на чертеже $K_1 = c_1 \cap d_1$, $K_2 = c_2 \cap d_2$ и K_1 и K_2 лежат на одной линии связи, то в пространстве прямые c и d пересекаются.

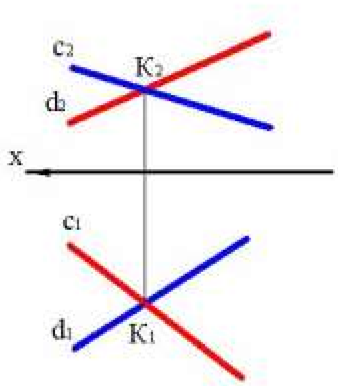
3. *Прямые скрещиваются (рис. 30).*

Прямые не параллельные и непересекающиеся называются *скрещивающимися.*

Точка пересечения горизонтальных проекций скрещивающихся прямых является проекцией двух фронтально-конкурирующих точек 1 и 2, принадлежащим прямым l и m.

Точка пересечения фронтальных проекций скрещивающихся прямых является фронтальной проекцией двух горизонтально-конкурирующих точек 3 и 4.





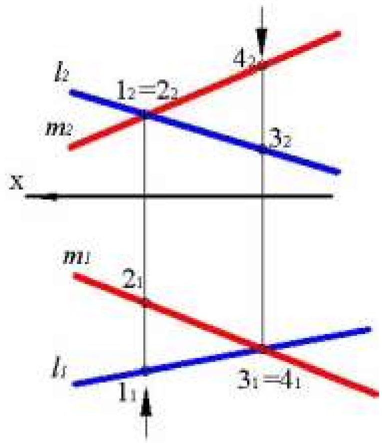


Рис. 28 Рис. 29 Рис. 30

По фронтально-конкурирующим точкам 1 и 2 определяется взаимное положе ние прямых l и m относительно фронтальной плоскости проекций Π_2. Горизонтальная проекция 1_2 точки 1, принадлежащей прямой l расположена ниже или ближе к наблюдателю, чем 2_1 точки 2, принадлежащей прямой m. Следовательно прямая l расположена над прямой m.

По горизонтально-конкурирующим точкам 3 и 4 определяется взаимное положение прямых l и m относительно Π_1.

Фронтальная проекция 4_2 точки 4 принадлежащей прямой m расположена выше, чем фронтальная проекция 3_2 точки 3, принадлежащей прямой l (проекция направления взгляда показана стрелкой). Следовательно прямая m расположена над прямой l.

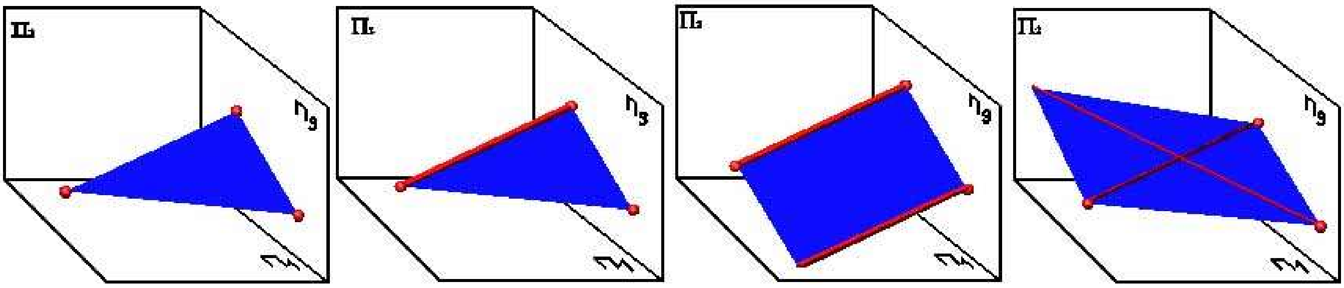
Отсюда получаем следующий критерий видимости для комплексного чертежа. Из двух горизонтально-конкурирующих точек на поле Π_1 видна та точка, которая расположена выше. Из двух фронтально-конкурирующих точек на поле Π_2 видна та точка, которая расположена ближе (по отношению к наблюдателя, стоящему лицом к плоскости Π_2).

V. КОМПЛЕКСНЫЙ ЧЕРТЕЖ ПЛОСКОСТИ

Плоскость является простейшей поверхностью. Плоскость может быть представлена как непрерывное множество определенным образом расположенных точек и прямых. Задание плоскости на чертеже проекциями этого бесчисленного множества точек или прямых практически невозможно и лишено смысла. Выход надо искать в выявлении на плоскости таких точек и прямых, которые однозначно определяют ее положение в пространстве и позволяют построить любую ее точку.

Из стереометрии известно, что через три точки пространства, не принадлежащих одной прямой, можно провести плоскость и при том только одну.

Следовательно, плоскость на чертеже может быть задана (рис. 31):



а) проекциями трех точек, не лежащих на одной прямой: Σ (A, B, C), Σ – символ задания плоскости.

б) проекциями прямой и точки, не лежащей на этой прямой: Δ (AB, C).

в) проекциями двух параллельных прямых: H(AB||CD).

г) проекциями двух пересекающихся прямых: Г(AB∩CD).

д) проекциями плоской фигуры: Ω(ΔABC).

Легко заметить, что перечисленные способы задания плоскости являются производными от первого.

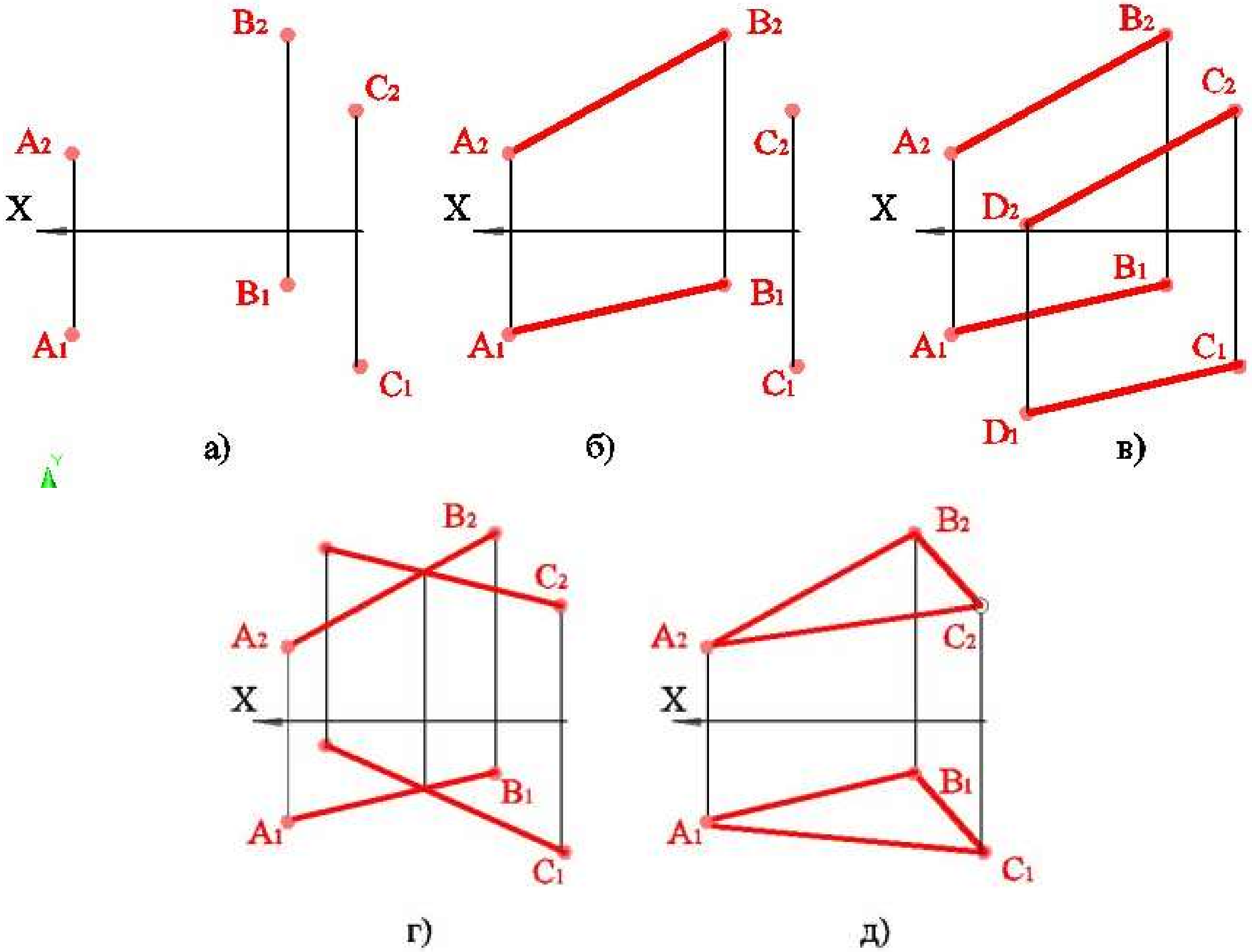


Рис. 31

1. Комплексный чертеж плоскости общего положения

Плоскость может занимать различные положения относительно плоскостей проекций.

Плоскость общего положения – плоскость не параллельная и не перпендикулярная ни одной из плоскостей проекций. Плоскость бесконечна, мы ее только ограничиваем. Задана плоскость ΔABC (рис. 32).

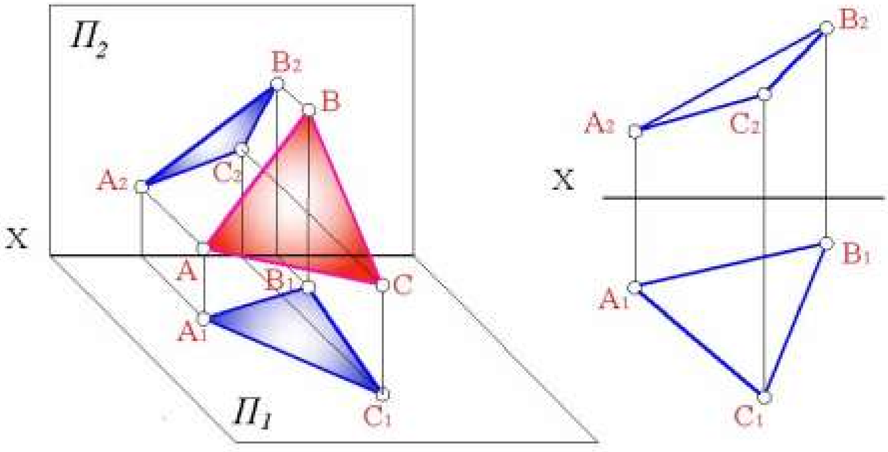


Рис. 32

Приводим систему к плоскому виду – комплексному чертежу. На комплексном чертеже плоскость изображается проекциями треугольника.

2. Проецирующие плоскости

Проецирующие плоскости – плоскость перпендикулярная одной из плоскостей проекций.

1) *Горизонтально-проецирующая плоскость* – плоскость перпендикулярная горизонтальной плоскости проекций (рис. 33).

Горизонтальная проекция плоскости Σ вырождается в прямую линию $\to \Sigma_1$.

Фронтальная проекция плоскости представляет собой неограниченное поле точек, совпадающих с полем Π_2: $\Pi_2 \to \Sigma_2 = \Pi_2$.

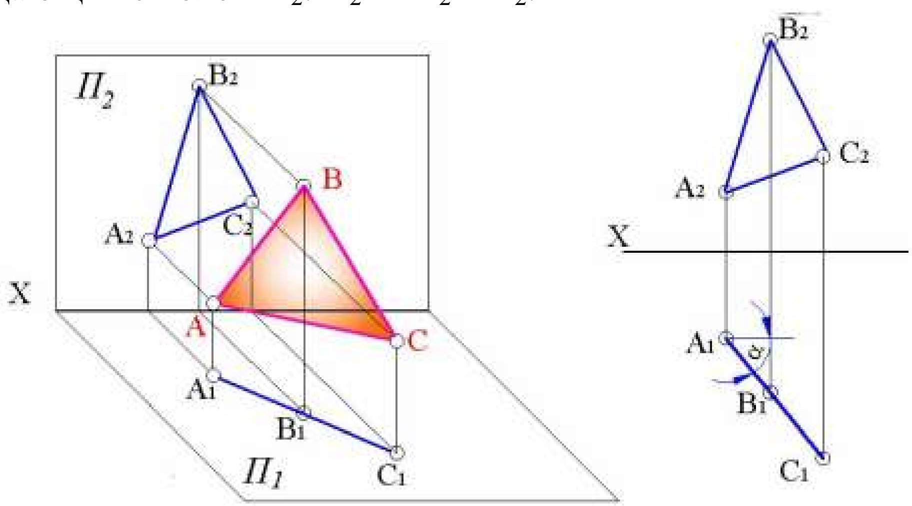


Рис. 33

Горизонтальная проекция любой точки или фигуры, лежащей в плоскости Σ; например ΔABC совпадает с горизонтальной проекцией Σ_1, $\angle\alpha$ – угол наклона к Π_2.

2) *Фронтально-проецирующая плоскость* – плоскость перпендикулярная к фронтальной плоскости проекций $П_2$ (рис. 34).

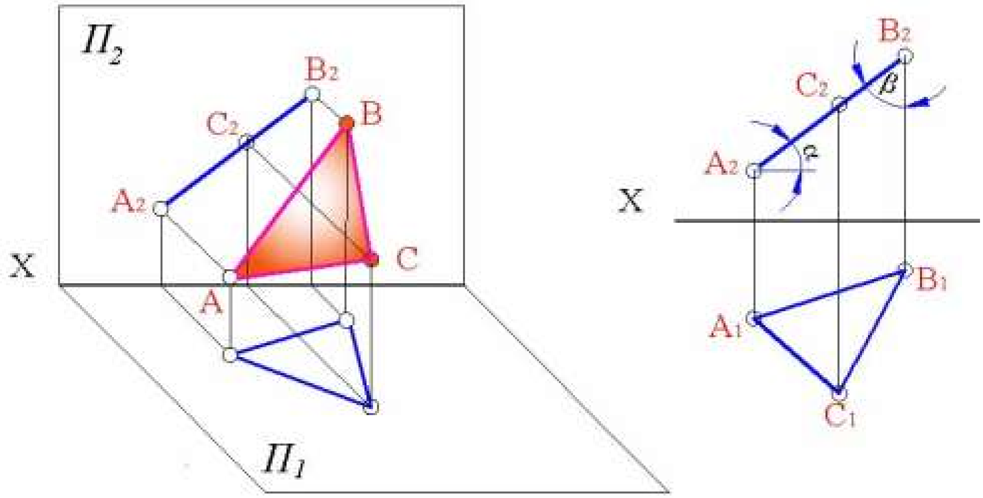


Рис. 34

Фронтальная проекция плоскости вырождается в прямую линию ($Δ_2$).

Горизонтальная проекция $Δ_1$ представляет собой неограниченное поле точек, совпадающих с полем $П_1$ ($Δ_2 \equiv П_1$).

Фронтальная проекция любой точки или фигуры, лежащей в плоскости Δ; например, ΔABC совпадает с фронтальной проекцией $Δ_2$ плоскости Δ, то есть $A_2B_2C_2 = Δ_2$. Фронтально-проецирующая плоскость Δ вполне определяется своей проекцией $Δ_2$, ∠α – угол наклона к $П_1$, ∠β – угол наклона к $П_2$.

3) *Профильно-проецирующая плоскость* – это плоскость перпендикулярная к профильной плоскости проекции (рис. 35).

Профильная проекция плоскости вырождается в прямую. Горизонтальная и фронтальная проекции представляют собой неограниченные поля точек, совпадающие соответственно с $П_1$ и $П_2 \rightarrow Г_1 \equiv П_1$; $Г_2 \equiv П_2$.

Профильная проекция любой точки или фигуры, лежащей в плоскости Q, например, ΔABC совпадает с профильной проекцией $Г_3$, → $A_3B_3C_3 \equiv Г_3$.

Профильно-проецирующая плоскость определяется одной своей проекцией $Г_3$ и углами наклона ∠α к $П_2$, ∠β – угол наклона к $П_1$.

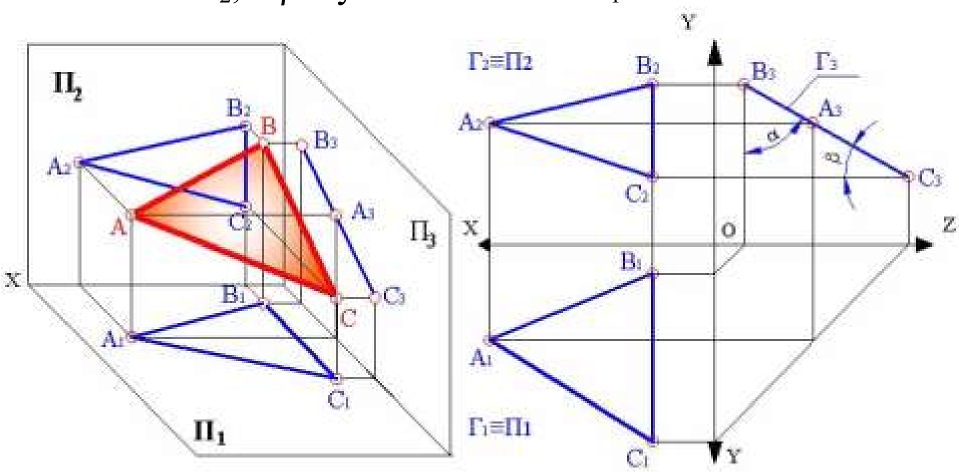


Рис. 35

3. Плоскости уровня

Плоскость параллельная одной из плоскостей проекций называется *плоскостью уровня.*

1) *Горизонтальная плоскость уровня* – плоскость параллельная горизонтальной плоскости проекции $Г || П_1$, $Г \perp П_2$, $Г \perp П_3$ (рис. 36).

Горизонтальная плоскость уровня Г перпендикулярна $П_2$ и $П_3$, то есть является дважды проецирующей плоскостью и следовательно обладает свойствами каждой из них. Любая фигура, например, ΔABC, лежащий в плоскости Г, проецируется без искажения на горизонтальную плоскость $П_1$.

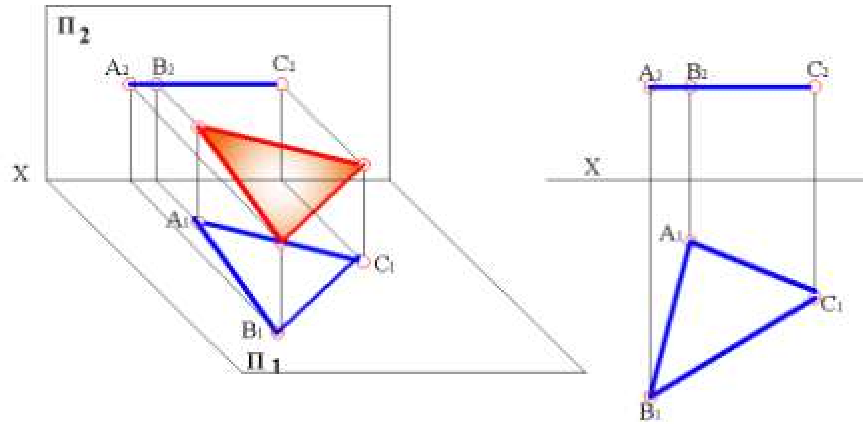


Рис. 36

2) *Фронтальная плоскость уровня* – плоскость параллельная фронтальной плоскости проекций $П_2$ $(\Delta || П_2)$ (рис. 7).

Фронтальная плоскость уровня $\Delta \perp П_1$ и $П_3$ является дважды проецирующей и обладает свойства каждой из них.

А любая фигура, например, ΔABC, лежащая в плоскости Δ проецируется без искажений на $П_2$.

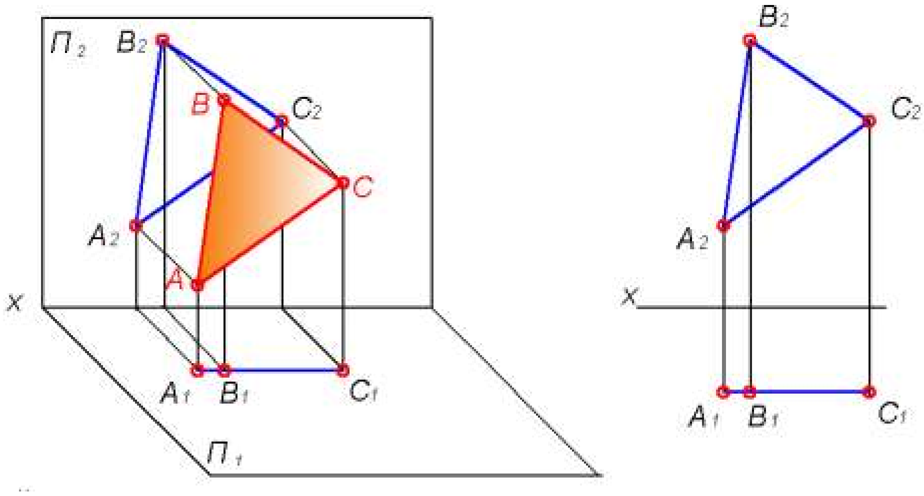


Рис. 37

3) *Профильная плоскость уровня* – плоскость параллельная профильной плоскости проекций $П_3$ $(\theta || П_3$, $\theta \perp П_2$, $\theta \perp П_1)$ (рис. 38).

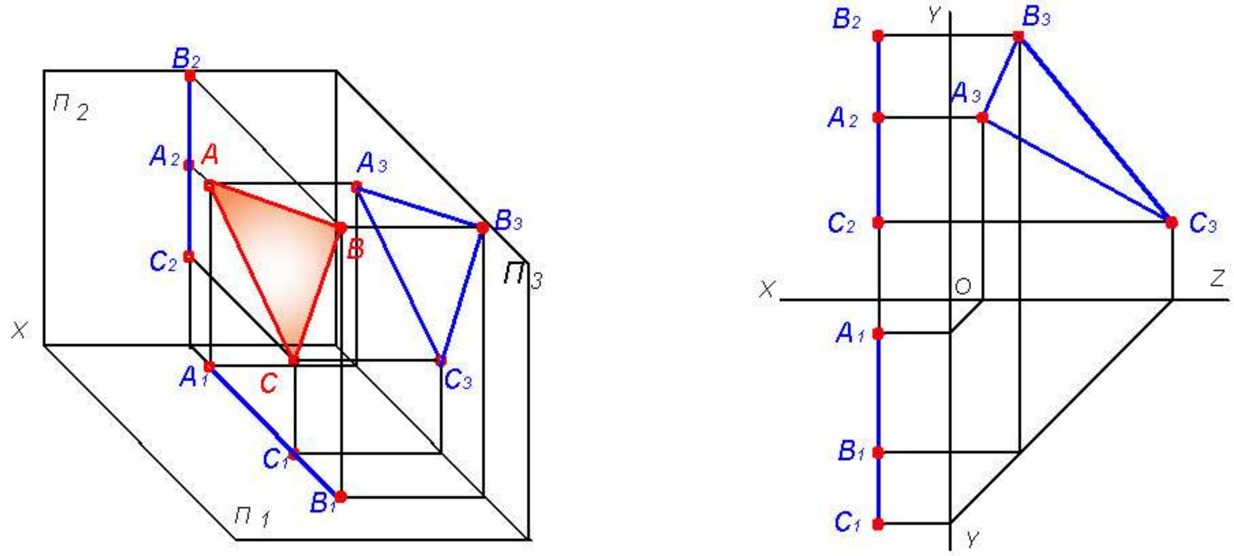


Рис. 38

4. Взаимопринадлежность точки, прямой и плоскости

Любой из указанных выше способов задания плоскости позволяет строить на чертеже точки, принадлежащие данной плоскости, а следовательно, и определяемые ими фигуры.

Из стереометрии известно (условие принадлежности):

1. Точка лежит в плоскости, если она принадлежит прямой, лежащей в этой плоскости.

2. Прямая лежит в плоскости, если она проходит через две точки, лежащие в этой плоскости.

3. Прямая лежит в плоскости, если она проходит через точку плоскости параллельно прямой, лежащей в плоскости.

ЗАМЕТКИ

Пусть задано плоскость $Г(a \cap b)$ (рис. 39).

1. Точка $M \in Г(a \cap b)$ так как $M \in a$, $M_1 \in a_1$ и $M_2 \in a_2$ (рис 40).

2. Прямая $l \in Г(a \cap b)$ так как $l \subset 1\text{-}2$, а точка $1 \in a$ и точка $2 \in b$.

3. $c \subset Г(a \cap b)$, так как $c \in 3$, а $3 \in Г(a \cap b)$ и $c \parallel a$.

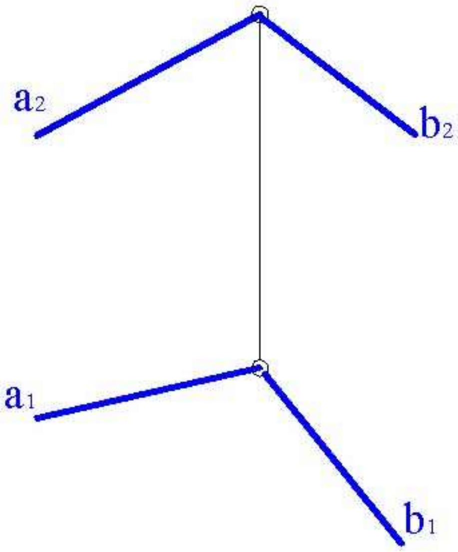


Рис. 39

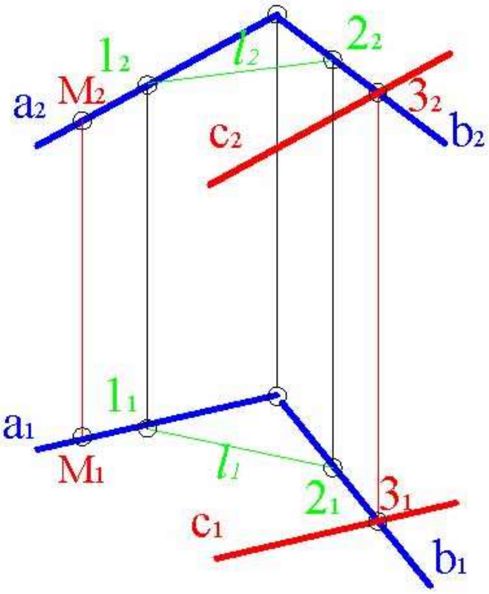


Рис. 40

5. Главные линии плоскости

Горизонтали, фронтали и профильные прямые, принадлежащие плоскости, называются главными линиями плоскости h, f, p $\subset \Sigma(ABC)$. Пусть задана плоскость общего положения $\Sigma(ABC)$ (рис. 41).

1. Построение горизонтали h, принадлежащей плоскости, начинается с проведения ее фронтальной проекции, перпендикулярной линиям связи в области фронтальной проекции плоскости, а горизонтальную проекцию h_1 строят из условия принадлежности горизонтали плоскости (рис. 42).
2. Построение фронтали f, принадлежащей $\Sigma(ABC)$, начинают с проведения ее горизонтальной проекции перпендикулярной линии связи. А фронтальную проекцию из условия принадлежности плоскости (см. Рис.42).
3. Профильная прямая p, принадлежащая плоскости должна быть определена двумя точками, принадлежащими этой плоскости (см. Рис.42).

Очевидно, что через каждую точку плоскости можно провести горизонталь h, фронталь f и одну профильную проекцию p. Вообще в плоскости, можно провести бесчисленное множество горизонталей, фронталей и профильных прямых. Все горизонтали плоскости параллельны между собой (то же для f и p).

4. Линии наибольшего ската – прямая перпендикулярная горизонтали.

Условия взаимопринадлежности прямой и точки плоскости позволяют построить чертеж любой плоской фигуры.

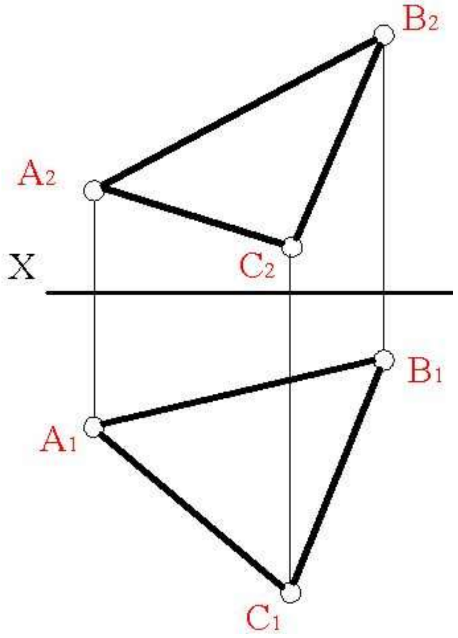


Рис. 41

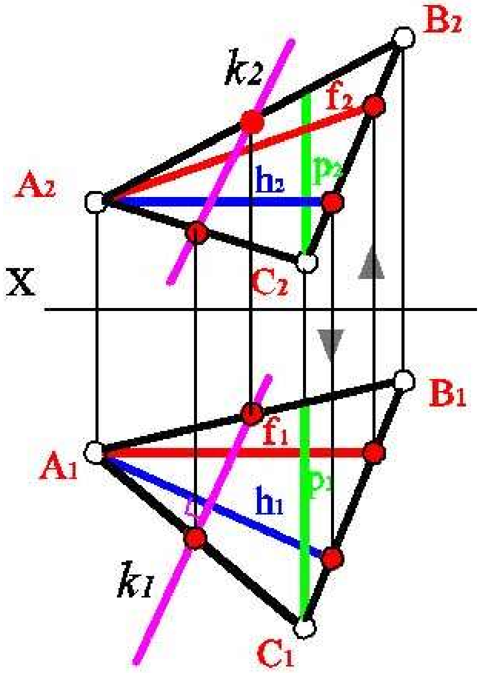


Рис. 42

6. Взаимная параллельность прямой и плоскости

Построение чертежа взаимно параллельной прямой и плоскости основано на теории стереометрии: если прямая параллельна какой-нибудь прямой, расположенной в плоскости, то она параллельна самой плоскости.

Пример:

Через точку M провести прямую, параллельную плоскости Г(ABC) (рис. 43).

Решение (рис. 44):

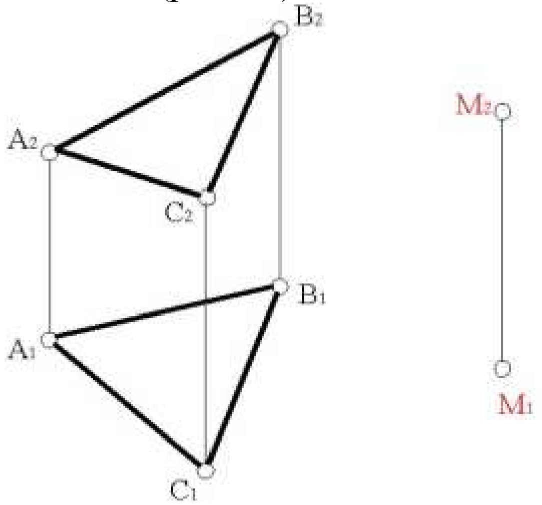


Рис. 43

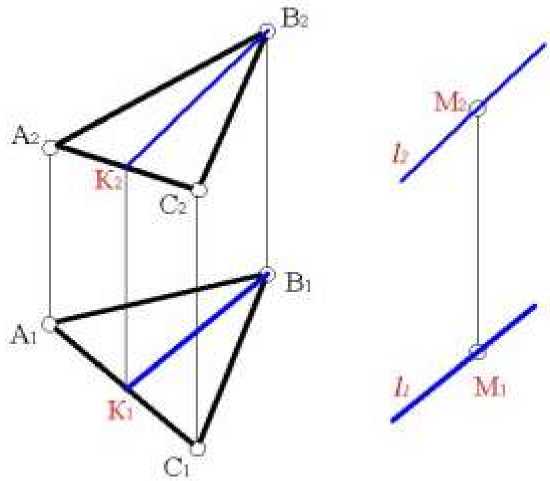


Рис. 44

1) Через произвольные точки (точка B и точка K) принадлежащие Г проводят прямую BK.

2) Через точку M проводят прямую l параллельную прямой BK. Прямая l является искомой, так как $l \parallel BK \subset Г$, $l \parallel Г$ ($l_1 \parallel B_1K_1$ и $l_2 \parallel B_2K_2$).

Обратная задача – построение плоскости параллельной данной прямой, выполненная на основании той же теоремы стереометрии. Обе задачи, очевидно, имеют бесчисленное множество решений.

7. Взаимная параллельность двух плоскостей

Построение чертежа двух параллельных плоскостей основано на теории стереометрии. Если две пересекающиеся прямые одной плоскости соответственно параллельны двум прямым другой плоскости, то эти плоскости параллельны.

Для построения плоскости $\Gamma^{/} \parallel \Gamma(ABC)$ достаточно провести через точку M две прямые соответственно параллельны каким-нибудь двум сторонам ΔABC (рис. 45).

Пусть $\Gamma^{/}(a \cap b) \parallel \Gamma(ABC)$, так как $b \parallel AB$, $a \parallel BC$, $b_2 \parallel A_2B_2$, $b_1 \parallel A_1B_1$, $a_2 \parallel B_2C_2$, $a_1 \parallel B_1C_1$ (рис. 46).

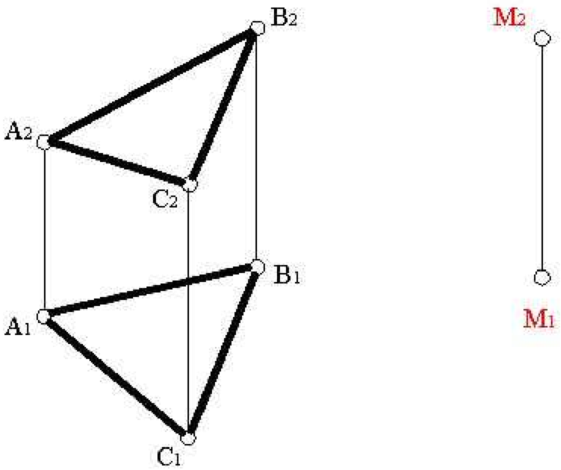


Рис. 45

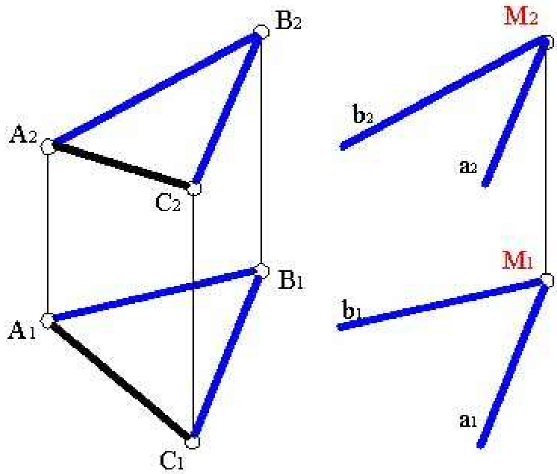


Рис. 46

8. Взаимноперпендикулярные прямые и плоскости

Условия взаимной перпендикулярности двух прямых, прямой и плоскости, двух плоскостей рассматриваются в стереометрии.

1. Прямая, перпендикулярна плоскости, если она перпендикулярна двум непараллельным прямым, принадлежащим этой плоскости (рис. 47).

2. Если прямая, перпендикулярная плоскости, то перпендикулярна к любой прямой (пересекающиеся или скрещивающиеся с ней), принадлежащей этой плоскости (рис. 48).

3. Две плоскости перпендикулярны, если одна из них проходит через прямую, перпендикулярную другой плоскости (рис. 49).

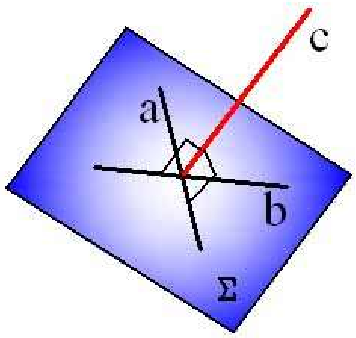


Рис. 47

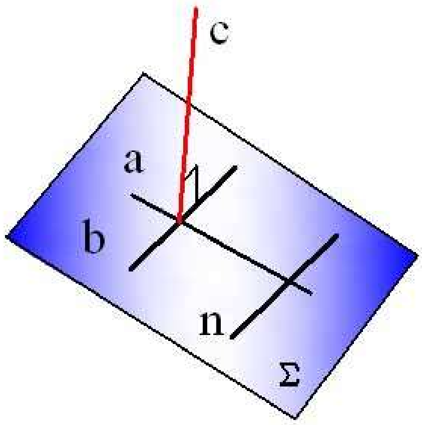


Рис. 48

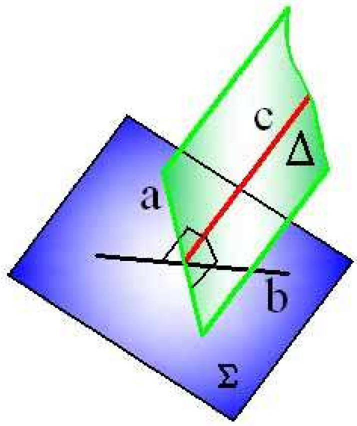


Рис. 49

9. Проекции прямого угла

Любой линейный угол (острый, тупой, прямой) проецируется на плоскость проекций в истинную величину, если его стороны параллельны этой плоскости. При этом вторая проекция угла вырождается в прямую линию, перпендикулярную линиям связи. Кроме этого случая, прямой угол проецируется в истинную величину еще и тогда, когда только одна из его сторон параллельна плоскости проекций.

В общем случае, когда обе стороны прямого угла являются прямыми общего положения, он проецируется на все плоскости проекций с искажением.

Но если одна из его сторон параллельна плоскости проекций, а вторая перпендикулярна этой плоскости, то прямой угол проецируется на нее без искажения.

Теорема 1: *Если одна сторона прямого угла параллельна плоскости проекций, а другая является прямой общего положения, то прямой угол проецируется на эту плоскость в истинную величину, то есть в прямой же угол.*

Дано: Стороны AB и BC прямого угла $\angle ABC$ параллельны горизонтальной плоскости проекций Π_1 (рис. 50).

Если $AB \parallel \Pi_1$, $BC \parallel \Pi_1$, тогда $\angle ABC$ спроецируется на плоскость Π_2 в истинную величину, то есть $\angle A_1B_1C_1 = 90^0$. Сторона AB и ее горизонтальная проекция A_1B_1 расположенная в горизонтально-проецирующей плоскости Σ. Сторона $BC \perp \Sigma$, так как $BC \perp AB$ – по условию, $BC \perp BB_1$ – по построению.

Следовательно прямая BC перпендикулярна к любой прямой (пересекающейся или скрещивающейся с ней) принадлежащей плоскости Σ., например, $BC \perp BD$, $BC \perp MN$. BD, MN – прямые общего положения.

Очевидно, что проекция на плоскость Π_1 прямого угла, образованного прямой BC с любой прямой общего положения (например, BD), принадлежащей плоскости

ЗАМЕТКИ

$\Sigma(\Sigma_1)$ соответствует с проекцией $A_1B_1C_1$ угла ABC: $\angle D_1B_1C_1 = 90^0$. Таким образом, теорема доказана.

Построим комплексный чертеж прямого угла $\angle$ABC, KLM.

Если сторона BC прямого угла параллельна $П_1$, то проекция прямого угла ABC изображается как показано на Рис.51.

Если сторона ML прямого угла параллельна $П_2$, то проекция прямого угла KLM на плоскость $П_2$ в истинную величину (см. рис. 51).

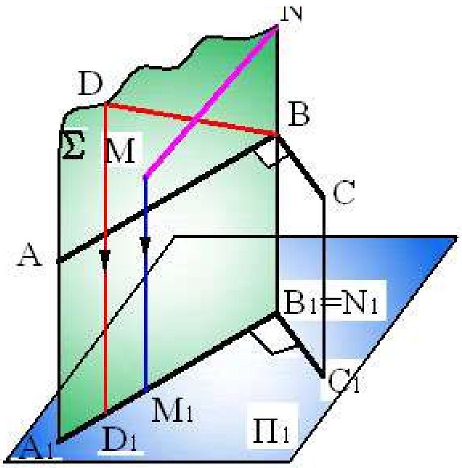


Рис. 50

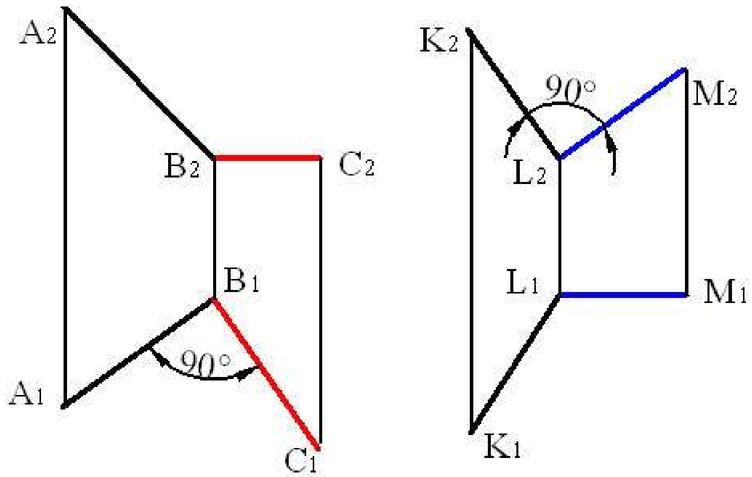


Рис. 51

10. Прямая перпендикулярная к плоскости

На вопрос о том, как расположена на комплексном чертеже проекции перпендикуляра к какой либо плоскости, отвечает следующей теореме.

Теорема 2: *Если прямая перпендикулярна к плоскости в пространстве, то на комплексном чертеже горизонтальная проекция прямой перпендикулярна горизонтальной проекции горизонтали, а фронтальная проекция перпендикулярна к фронтальной проекции фронтали, принадлежащей этой плоскости.*

Дано: Прямая AK$\perp\Sigma$. Проведем на плоскости Σ произвольные горизонталь h и фронталь f. Так как перпендикуляр к плоскости образует прямые углы всеми прямыми, проведенными на плоскости AK$\perp$ h и AK$\perp$ f (рис. 52).

На основании теоремы 1:

1. Прямой угол AKh проецируется на плоскость $П_1$ в истинную величину, то есть $A_1K_1\perp h_1$, так как $h \,||\, П_1$.

2. Прямой угол AKf проецируется на плоскость $П_2$ в истинную величину, то есть $A_2K_2\perp f_2$ и $f \,||\, П_2$.

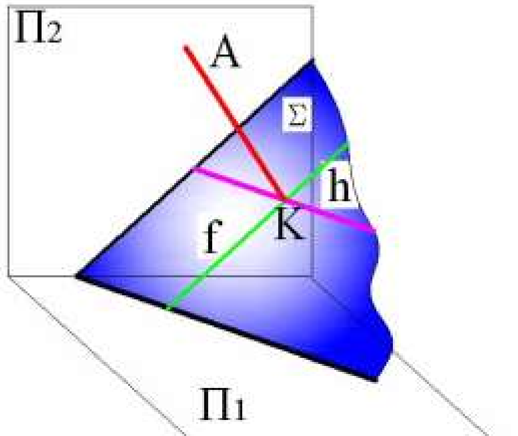


Рис. 52

Все горизонтали, принадлежащие одной и той же плоскости, параллельны между собой, а все фронтали – между собой. Поэтому для построения проекций перпендикуляра к плоскости на ней проводятся любые вспомогательные фронталь и горизонталь.

Задача 1: Опустить перпендикуляр из точки D на плоскость Δ(ABC) (рис. 53).

В плоскости Δ(ABC) построены горизонталь $h(h_1, h_2)$ и фронталь $f(f_1, f_2)$. Проекции искомого перпендикуляра проведены через соответствующие проекции A_1 и A_2 заданной точки A так, что $m_1 \perp h_1$, $m_2 \perp f_2$. Точка пересечения перпендикуляра с плоскостью Δ(ABC) *не определяется* (рис. 54).

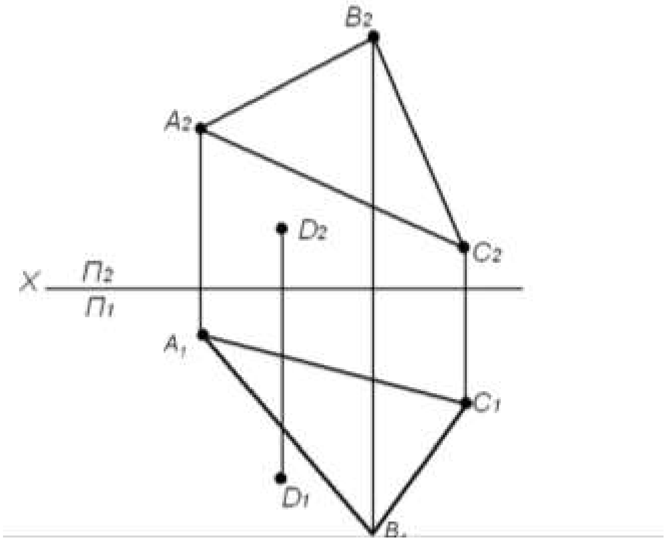


Рис. 53

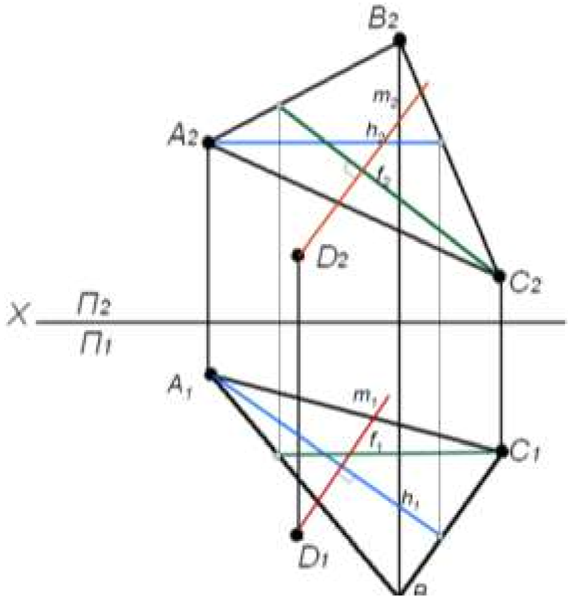


Рис. 54

VI. ПОЗИЦИОННЫЕ ЗАДАЧИ НА ТОЧКУ, ПРЯМУЮ И ПЛОСКОСТЬ

Задачи, в которых определяется относительное положение или общие элементы заданных геометрических образов, называются позиционными.

Рассмотрим только те из позиционных задач, в которых определяются общие элементы (точки или линии) заданных геометрических образов. Задачи этого типа разделяются на *первую* и *вторую* позиционную.

К *первой позиционной* относятся все задачи, в которых определяются точки пересечения линии и поверхности.

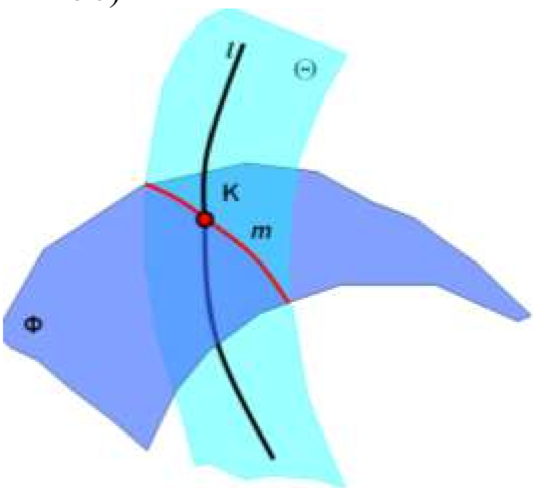
Ко *второй* – все задачи, в которых определяется линия взаимного пересечения двух поверхностей.

Алгоритм – (лат. транслитерация имени математика аль-Хорезми), способ решения задач, точно предписывающих как и в какой последовательности получить результат. (Транслитерация – передача текста, написанного с помощью одного алфавита, средствами другого алфавита).

1. Метод решения первой позиционной задачи

В зависимости от вида и взаимного расположения линии и поверхности точек их пересечения может быть несколько. Например, прямая линия с алгебраической поверхностью n-го порядка пересекается в n точках. В основу их построения положен так называемый способ вспомогательных поверхностей, сущность которого состоит в том, что каждая из искомых точек рассматривается как результат пересечения двух линий, принадлежащих вспомогательной поверхности. Одна из них является заданной линией, а вторая – линией пересечения вспомогательной и заданной поверхностей.

В соответствии с этим построение точек пересечения линии l и поверхности Ф (независимо от их вида) осуществляется по следующей общей схеме (рис.55, 56)



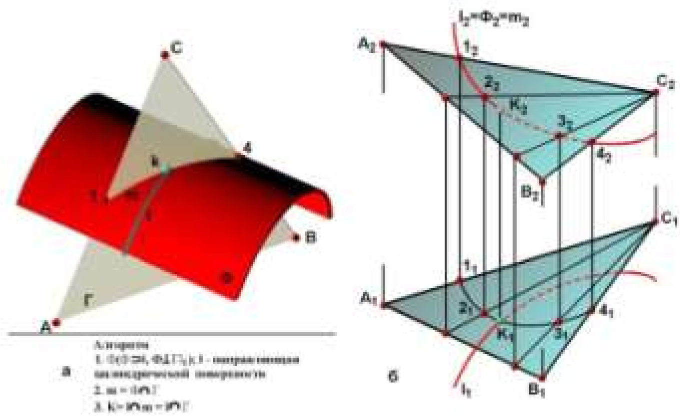


Рис. 55 Рис.56

1. Через данную линию l проводится вспомогательная поверхность Θ (Θ $\supset$ l).

2. Определяется линия m пересечения вспомогательной Θ и заданной Ф поверхностей (m = Θ ∩ Ф).

3. Отмечается точка К пересечения линий m и l, которая и является искомой, так как $m \subset$ Ф (К = $l \cap m = l \cap$ Ф).

Краткая запись алгоритма первой позиционной задачи:

$$К = \underbrace{(\Theta \cap Ф)}_{m} \cap l.$$

При решении конкретной задачи п. 1 общей схемы необходимо расшифровать, т.е. точно указать вид и положение вспомогательной поверхности, которую необходимо применить для определения точек пересечения заданной линии и поверхности. Такая конкретизированная схема решения задачи в пространстве называется *алгоритмом*. Только после его составления можно перейти к решению (построению) задачи на комплексном чертеже.

2. Пересечение прямой с плоскостью

1. Определение точки пересечения прямой общего положения с плоскостью общего положения (рис. 57).

В качестве вспомогательных поверхностей наиболее часто применяются плоскости (общего и частного положения). Выбор вида и положения вспомогательной поверхности определяют главным образом следующие факторы:

а) вид заданной линии l (если l – прямая линия, то в качестве вспомогательной выбирается плоскость, проходящая через прямую);

б) требование простоты и точности построения на комплексном чертеже, для чего вспомогательную поверхность следует проводить так, чтобы проекции линии ее пересечения с заданной поверхностью были графически простыми линиями.

Пример: Построить точку К пересечения прямой l общего положения и плоскости Θ (ABC) – общего положения (рис. 58).

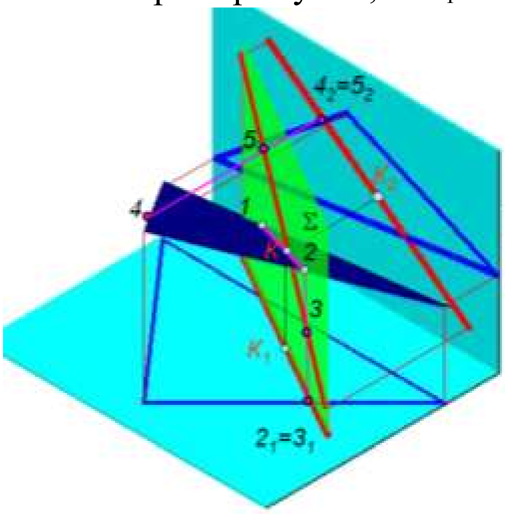
Дано: l , Θ (ABC). Найти: $К = l \cap \Theta$ ABC).

Алгоритм:

1. $\Sigma \supset l$; $\Sigma \perp \Pi_1$ – то есть через l проводим вспомогательную горизонтально-проецирующую плоскость Σ.
2. $(1\text{-}2) = \Sigma \cap \Theta$ (ABC) – строим линию пересечения двух плоскостей.
3. $К = (1\text{-}2) \cap l$ – находим исходную точку пересечения l и (1-2).

$$К = \underbrace{(\Theta \cap \Sigma)}_{1\text{-}2} \cap l$$

Графически реализуем этот алгоритм. Проведем горизонтально-проецирующая плоскость Ф через прямую l, $\rightarrow l_1 \equiv \Sigma_1$.



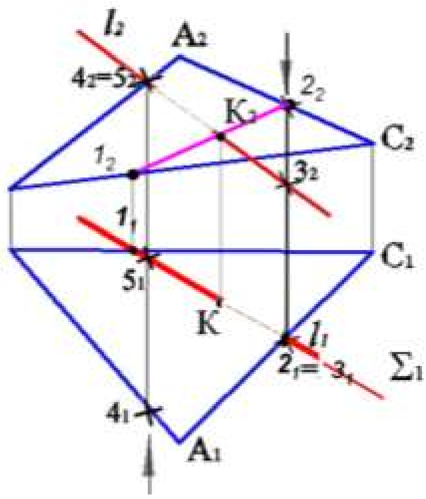


Рис. 57 Рис. 58

Найдена горизонталь 1_1-2_1 и фронталь 1_2-2_2 проекции линии 1-2 пересечения плоскостей Ф и Θ (ABC). Точка К2 пересечения фронтальной проекцией ℓ_2 и 1_2-2_2 является фронтальной проекцией искомой точки $К_1$. Ее фронтальная проекция определит горизонтальную из условия принадлежности точки К прямой ℓ.

Считая, что заданная плоскость Θ (ABC) непрозрачна, определены видимость прямой ℓ относительно плоскостей проекций. По горизонтально-конкурирующим точкам 2 и 3 и фронтально-конкурирующим точкам 4 и 5.

3. Пересечение двух плоскостей. Вторая позиционная задача

Две плоскости пересекаются по прямой линии, поэтому для ее определения достаточно найти две точки, принадлежащие одновременно каждой из двух заданных плоскостей. В основу решения Второй позиционной задачи положен метод вспомогательных секущих плоскостей (рис. 59):

1) проводится вспомогательная секущая плоскость Γ, пересекающая заданные плоскости Σ и Δ;

2) линии m и n – это линии пересечения вспомогательных плоскостей с каждой из заданных: $m = \Gamma\cap\Sigma$; $n = \Gamma\cap\Delta$;

3) Находим точку К пересечения построенных линий m и n, которая является искомой, так как одновременно принадлежит поверхностям Σ и Δ: $К = m \cap n$.

Окончательный алгоритм для нахождения точки К:

$К = (\Gamma\cap\Sigma)\cap(\Gamma\cap\Delta)$ – алгоритм второй позиционной задачи для нахождения одной точки.

$К' = (\Gamma'\cap\Sigma;) \cap (\Gamma'\cap\Delta)$ – алгоритм второй позиционной задачи для нахождения второй точки: $k = (КК')$.

Задача 1. *Построить линию пересечения плоскостей $\Phi(a\cap b)$ и $\Psi(c//b)$ (рис. 60).*

1. Проводим вспомогательную горизонтальную плоскость уровня Γ, пересекающую заданные плоскости $\Phi(a\cap b)$ и $\Psi(c\,||\,b)$.
2. Определяем линии 1-2 и 3-4 пересечения Γ с каждой из заданных плоскостей: $(1\text{-}2) = (\Gamma\cap\Phi(a\cap b))$; $(3\text{-}4) = (\Gamma\cap\Psi(c\,||\,b))$.
3. Находим точку К пересечения построенных линий (1-2) и (3-4), которая является искомой, так как одновременно принадлежит поверхностям $\Phi(a\cap b)$ и $\Psi(c\,||\,b)$.

Окончательный алгоритм для нахождения точки К:

$К = (\Gamma\cap\Phi(a\cap b))\cap(\Gamma\cap\Psi(c\,||\,b))$ – алгоритм второй позиционной задачи для нахождения одной точки.

Определение второй точки $К'$ осуществляется по аналогичному алгоритму:

1) проводим вспомогательную горизонтальную плоскость уровня Γ', пересекающую заданные плоскости $\Phi(a\cap b)$ и $\Psi(c\,||\,b)$;

2) $(5\text{-}6) = (\Gamma'\cap\Phi(a\cap b))$; $(7\text{-}8) = (\Gamma'\cap\Psi(c\,||\,b))$;

3) $К' = (5\text{-}6)\cap(7\text{-}8)$.

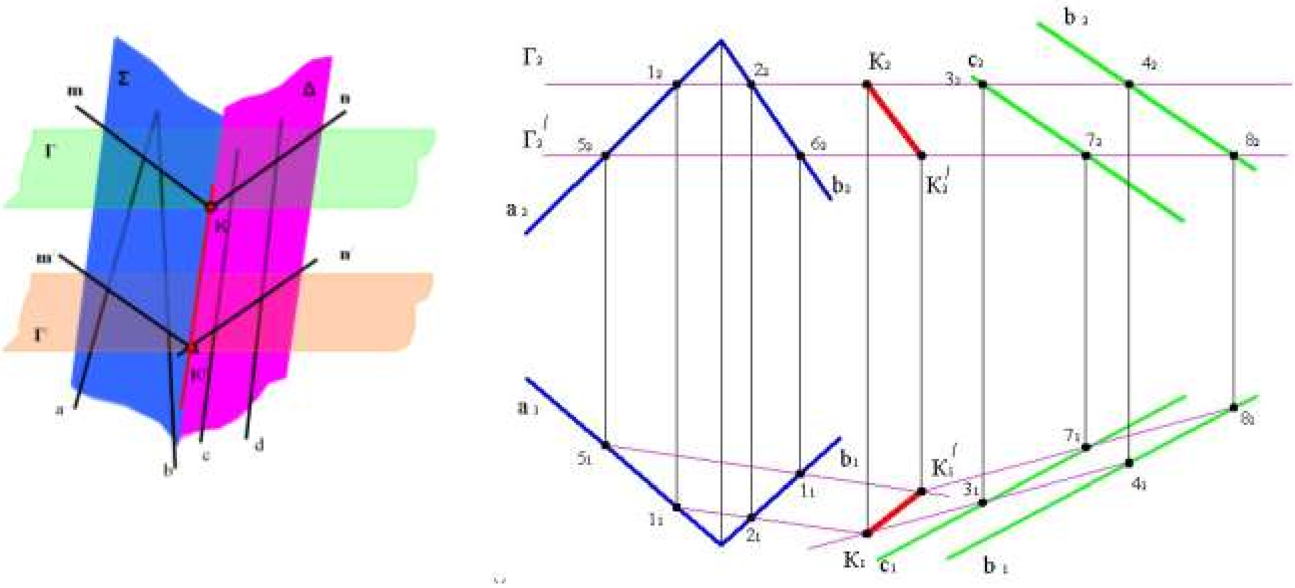


Рис. 60

Задача: *Построить линию пересечения плоскостей $\Delta(ABC)$, Ψ (DEFK)* (рис. 61).

В случае, когда в условии задачи идет наложение проекций плоскостей, задачу удобнее решать как первую позиционную, то есть использовать прямые принадлежащие плоскостям (рис. 62).

Алгоритм:

1. Через прямую АС проводим вспомогательную горизонтально-проецирующую плоскость Г:

$\Gamma \supset AC,\ \Gamma \perp \Pi_1$

2. Вспомогательная плоскость Г и плоскость четырехугольника DEFK пересекаются по прямой 1-2:

$\Gamma \cap \Psi\ (DEFK) = (1\text{-}2)$

3. Две прямые(1-2) и Ас треугольника АВС пересекаются в точке М:

$(1\text{-}2) \cap AC = M$

Для второй точки N алгоритм повторяется:

4. $\Sigma \supset BC,\ \Sigma \perp \Pi_1$

5. $\Sigma \cap \Psi\ (DEFK) = (3\text{-}4)$

6. $(3\text{-}4) \cap BC = N$

7. $\Delta(ABC) \cap \Psi\ (DEFK) = MN$.

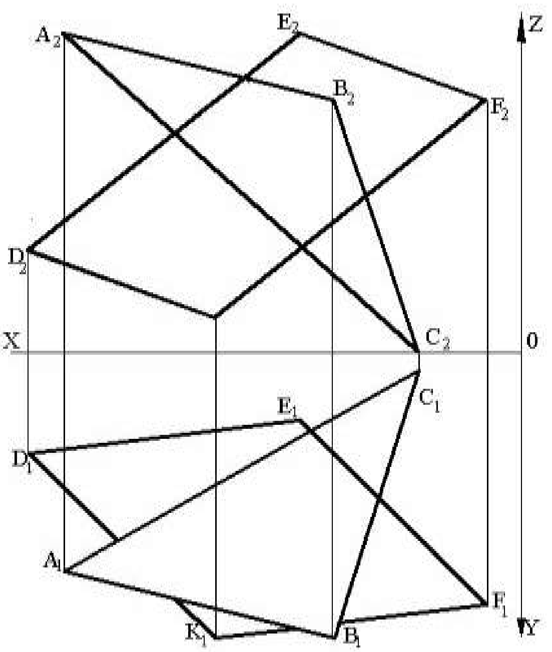


Рис. 61

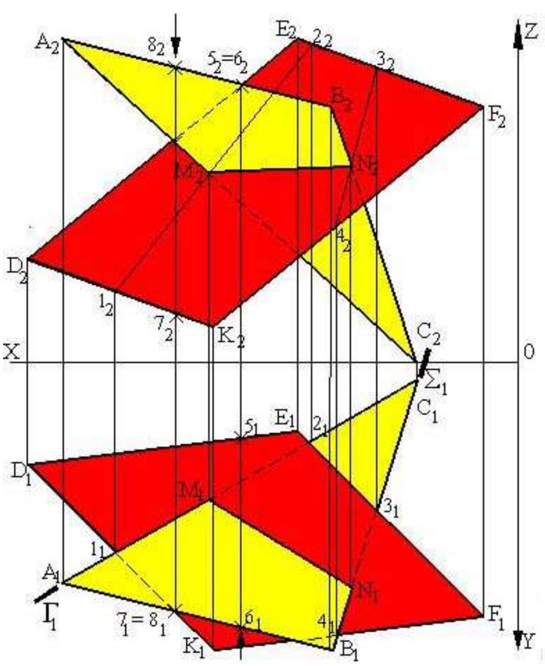


Рис. 62

Для определения видимости фигур в задачах используется метод конкурирующих точек. Рассмотрим этот метод по Рис.62. Пусть точка $5 \in DE$, а точка $6 \in AB$. На плоскости Π_2 проекции этих точек совпадают, т.е. они являются фронтально-конкурирующими. На плоскости Π_1 проекция точки 6 будет расположена ближе чем проекция точки 5 (если смотреть с положительного направления оси Y). Значит на плоскости Π_2 отрезок АВ – будет видимый, а отрезок DE – невидимый. Пусть точка $7 \in DK$, точка $8 \in AB$. На плоскости Π_1 проекции этих точек совпадают, т.е. точки являются горизонтально-конкурирующими. На плоскости Π_2 проекция точки 7 будет расположена ниже, чем проекция точки 8. Значит на плоскости Π_1 отрезок АВ будет видимый, а отрезок DK невидимый.

VIII. КОМПЛЕКСНЫЕ ЧЕРТЕЖИ ПОВЕРХНОСТЕЙ

Все поверхности можно разделить на:
плоские (плоскости);
многогранные;
кривые.

Плоскость – простейшая поверхность. основные свойства которой выражаются следующим отношением:

Если две точки прямой принадлежат плоскости, то все точки прямой принадлежат плоскости.

Три точки, не лежащие на одной прямой, принадлежат только одной плоскости.

Две плоскости пересекаются по прямой линии, которая является единственной.

Таким образом, прямая линия, наложенная на плоскость в любом направлении, совпадает с ней всеми своими точками. Никакая другая поверхность не обладает такими свойствами.

Поверхность, образованная частями пересекающихся плоскостей, называется многогранной.

Все неплоские и немногогранные поверхности называются *кривыми*.

1. Многогранные поверхности. Многогранники

На рисунке изображены некоторые виды многогранных поверхностей. Элементами таких поверхностей являются грани, ребра, вершины (рис. 63).

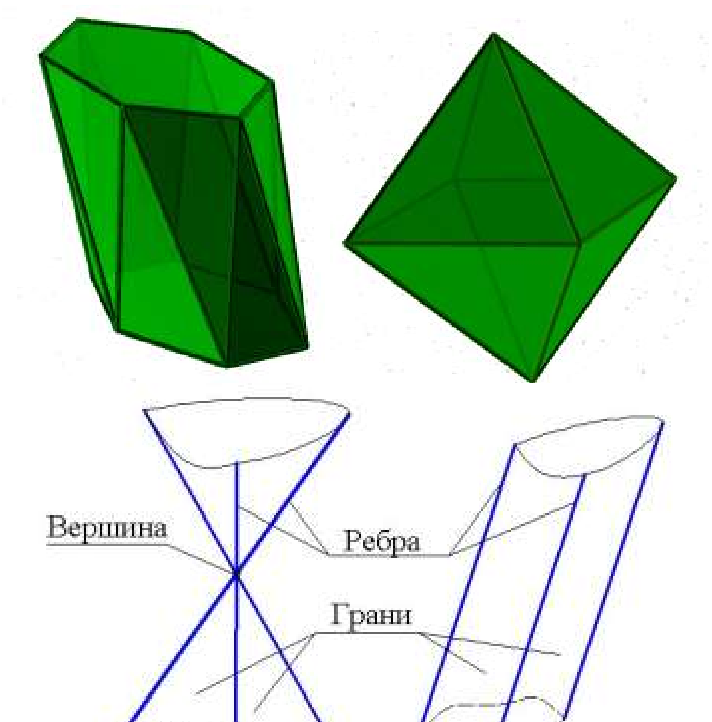


Рис. 63

Грань – часть плоскости, ограниченная прямыми или отрезками прямых.

Ребро – прямая линия, по которой пересекаются две смежные грани.

Вершина – точка пересечения не менее трех граней.

Многогранная поверхность называется пирамидальной, если все ребра пересекаются в одной точке – вершине.

Пирамидальная поверхность имеет две неограниченные полы.

Задача. *Построить две проекции пирамиды SABC по заданным координатам вершин: S(20;110;10); A(140; 90; 90); B(110;20;0); C(40;30;70* (рис. 64)).

Многоугольник $S_1A_1B_1C_1$ называется очерком горизонтальной проекции пирамиды, а $S_2A_2B_2C_2$ – очерк фронтальной проекции. Очерк проекции всегда видим. Видимость линий, расположенных внутри очерков, определяется при помощи конкурирующих точек. Проекции точек, принадлежащие поверхности, располагаются на линиях очерка и внутри его. Никакая точка поверхности не может иметь свою проекцию за пределами очерка

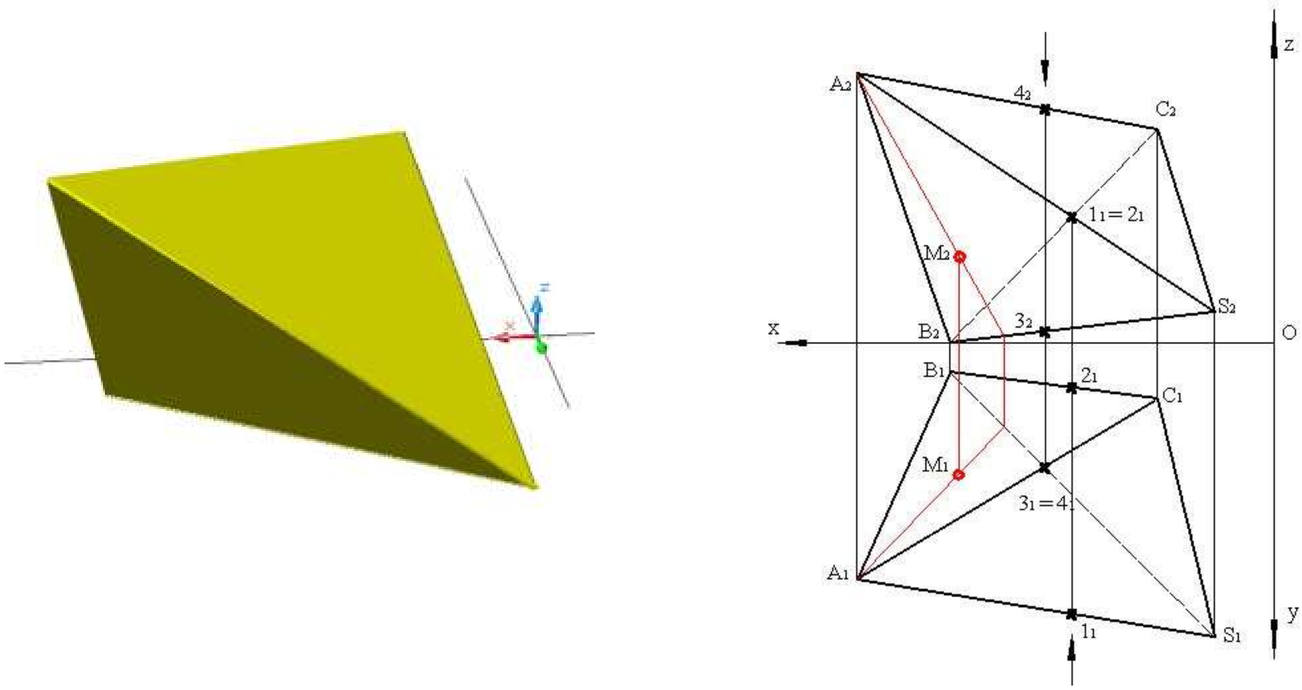


Рис. 64

.Многогранная поверхность называется призматической, если все ее ребра параллельны между собой.

Геометрическое тело со всех сторон ограниченное плоскими многоугольниками называется многогранником.

Простейшим примером многогранника могут служить пирамиды и призмы. Совокупность всех ребер и вершин многогранника называется ***сеткой***. Построение проекций многогранника сводится к построению проекций его сетки.

Количество проекций многогранника должно быть таким, чтобы обеспечивалось обратимость чертежа.

Чертеж называется обратимым, если по одной проекции точки, принадлежащей поверхности, можно построить ее вторую проекцию.

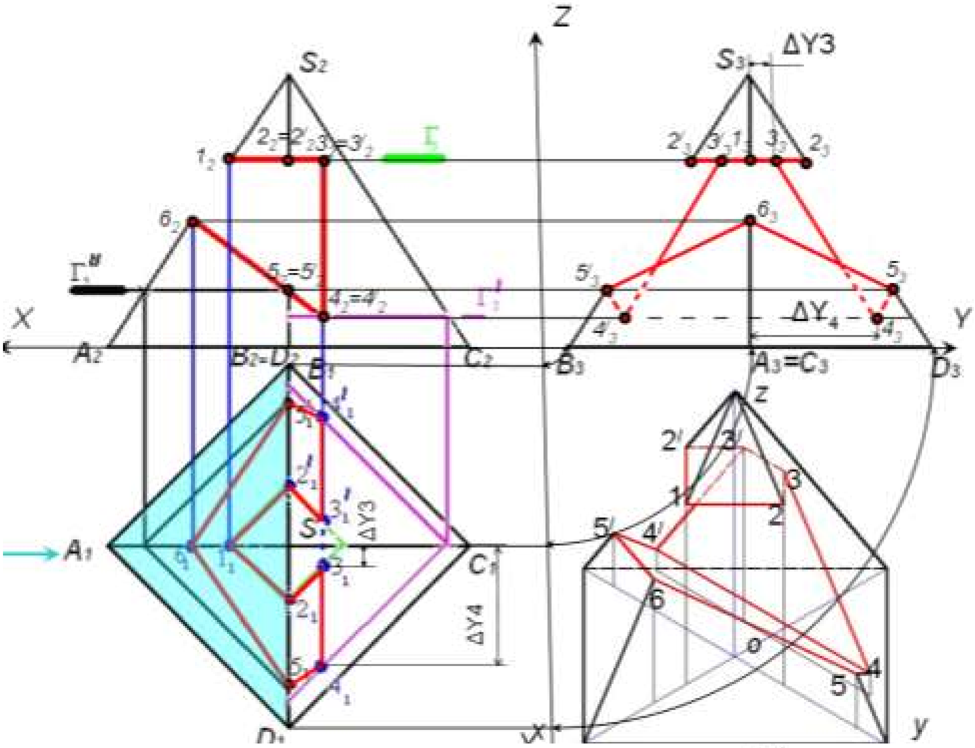
7.2. Вырез проецирующими плоскостями

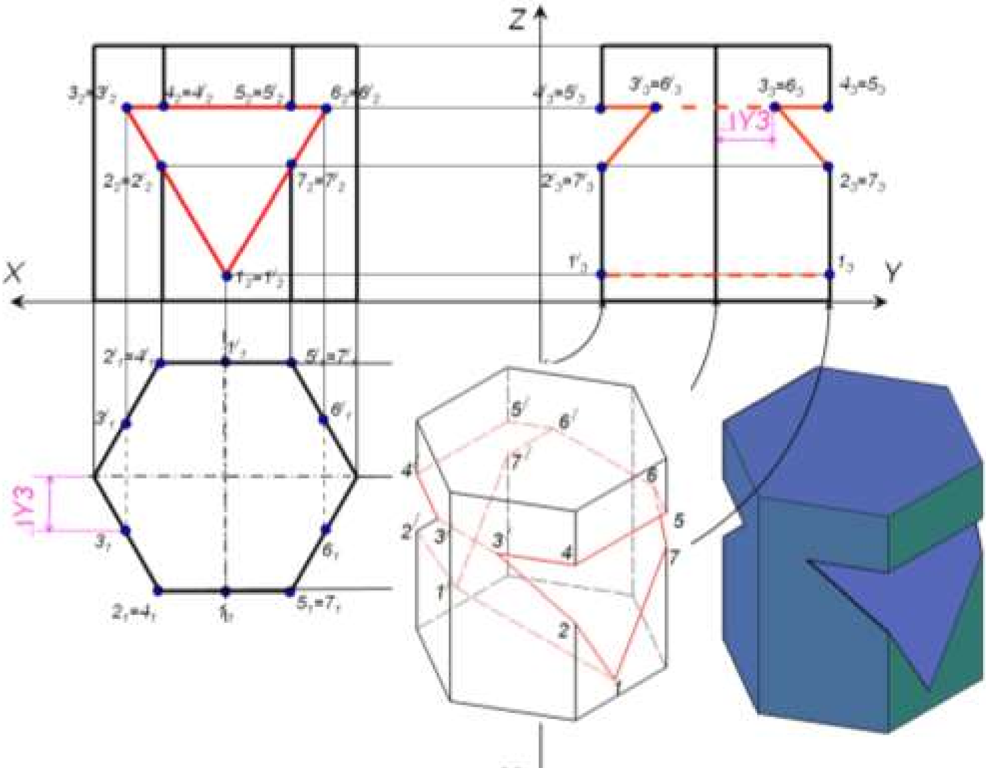
Даны непрозрачные геометрические тела с вырезами, выполненными проецирующими плоскостями (рис. 63). На комплексном чертеже требуется:

1) построить три проекции геометрического тела и линию сечения заданными плоскостями;

2) определить видимость элементов геометрического тела и линий сечения.

Решение задачи приведено на рис. 64.





III. АКСОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ПРОЕКЦИИ

В многих случаях при выполнении технических чертежей оказывается необходимым наряду с изображениями предметов в системе ортогональных проекций иметь изображения более наглядные, но обладающие свойством обратимости. Более наглядный чертеж можно получить, проецируя предмет на одну плоскость проекций и располагая его так, чтобы длина, ширина и высота его воспринимались на одной проекции. Взгляд при этом как бы «охватывает» сразу три стороны предмета. Для построения таких изображений применяют проекции, называемые аксонометрическими или сокращенно ***аксонометрия***. Название аксонометрия образовано из слов древнегреческого языка: *аксон* — ось, *метрео* — измеряю, то есть буквально осеизмерение.

Способ аксонометрического проецирования состоит в том, что данная фигура вместе с осями прямоугольных координат, к которым эта система точек отнесена в пространстве, параллельно проецируется на некоторую плоскость.

Аксонометрическая проекция — это чертеж, состоящий из изображения на одной плоскости проекций предмета и координатных осей, к которым он отнесен вместе с натуральными масштабными отрезками по этим осям.

Коэффициентом искажения называется отношение длины аксонометрической проекции отрезка, лежащего на координатной оси или параллельного ей, к длине самого отрезка.

В зависимости от направления проецирования различают ***прямоугольную*** аксонометрию и ***косоугольную***.

В зависимости от коэффициентов искажения существуют: *изометрия, диметрия и триметрия.*

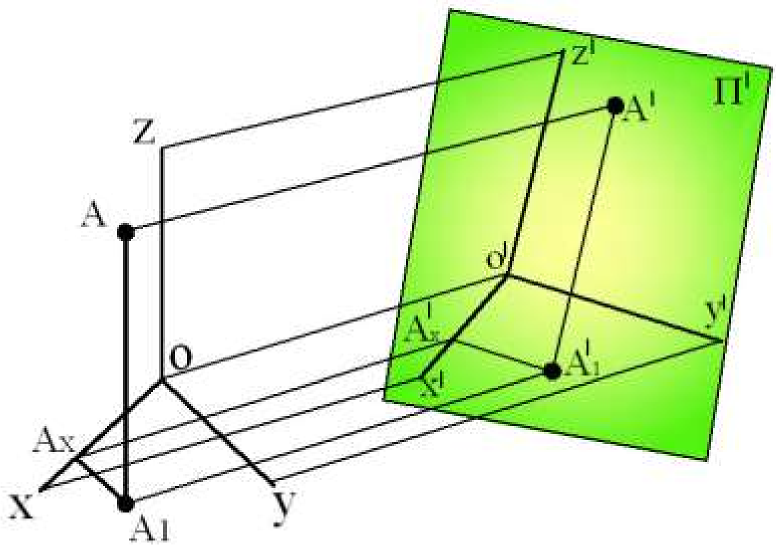


Рис. 65

Изометрические проекции

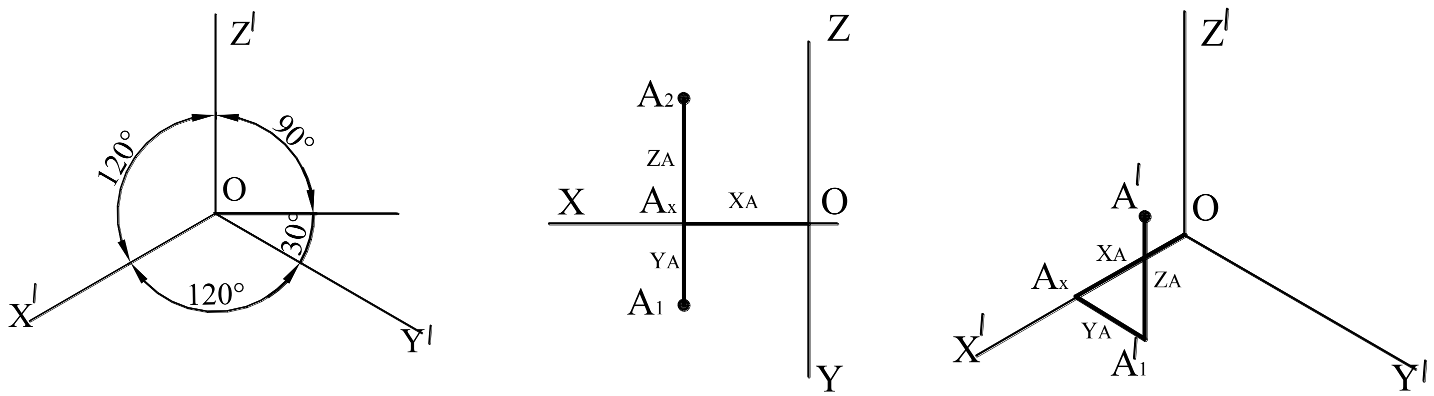


Рис.66

Изометрическая проекция — проекция одинаковых коэффициентов искажения по всем трем осям. Это обозначает, что в прямоугольной изометрической проекции получается по каждой из осей (или по направлениям параллельно им) сокращение приблизительно равное 0,82. При построении аксонометрических проекций следует помнить, что откладывать можно только отрезки, расположенные на осях или параллельные им. Отрезки не параллельные координатной оси, проецируются с иными искажениями. Однако для удобства построения детали в изометрической проекции рекомендуется строить без сокращения по осям [3].

Изометрические проекции геометрических тел

Рассмотрим построение изометрии геометрических тел на примере шестигранной призмы (рис.).

1. На комплексном чертеже размечают оси координат. Оси ориентируют так, чтобы они допускали удобное измерение координат точек предмета, совмещая их с осями симметрии. Такая система координат называется внутренней.
2. Выполнение изометрии начинается с построения изометрической проекции осей координат.
3. На изометрической проекции оси X строим отрезки AO = DO.
4. На изометрической проекции оси Y отложим отрезки O1 = O2 и через точки 1 и 2 проводим отрезки, параллельные оси X. На построенных отрезках откладываем отрезки 1B = 1C = 2E = 2F.
5. Соединяем полученные точки. Получаем изометрическую проекцию шестиугольника.
6. Строим отрезки, параллельные оси Z, и на них откладываем высоту призмы.

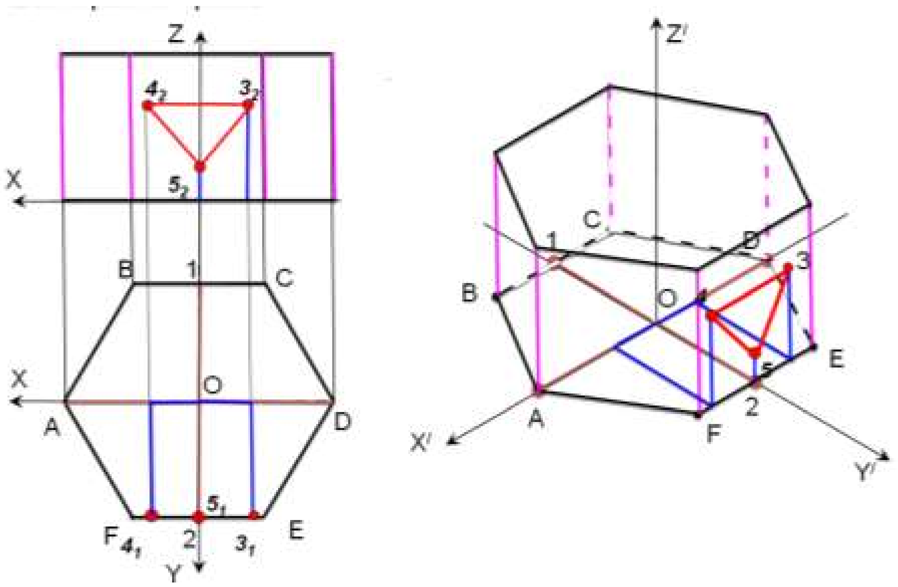


Рис. 67

Изометрические проекции окружности

Окружность в большинстве случаев в аксонометрических проекциях проецируется в эллипс. В прямоугольной изометрической проекции малая ось эллипса AB = 0,71d, а большая ось CD =1,22d во всех трех плоскостях XOY, ZOY, XOZ.

Основное правило расположения осей эллипса в изометрии. Малая ось эллипса, изображающего окружность, лежащую в одной из координатных плоскостей, параллельна (или совпадает) с аксонометрической проекцией натуральной оси, отсутствующей в этой плоскости, а большая – ей перпендикулярна.

В учебных чертежах вместо эллипсов рекомендуется применять овалы, очерченные дугами окружностей. Рассмотрим построение овала, расположенного в плоскости XOY(рис.).

1. Строим изометрическую проекцию осей координат. Проводим малую ось параллельную оси Z, а большую ось – перпендикулярно ей.

2. Проводим вспомогательные окружности диаметром равным AB и CD. Находим точки O_1, O_2, O_3, O_4.

3. Из точек O_3 и O_4 проведем дуги радиусом $R= O_3A= O_4B$.

4. Определим точки сопряжения дуг, проведя прямые O_3O_1, O_3O_2, O_4O_1, O_4O_2 до пересечения с соответствующими дугами. Получим точки S_1, S_2, S_3, S_4.

5. Из центров O_1 и O_2 проведем дуги радиусом $r = O_1C= O_2D$.

Аналогично построение овалов в плоскостях ZOY и XOZ [5].

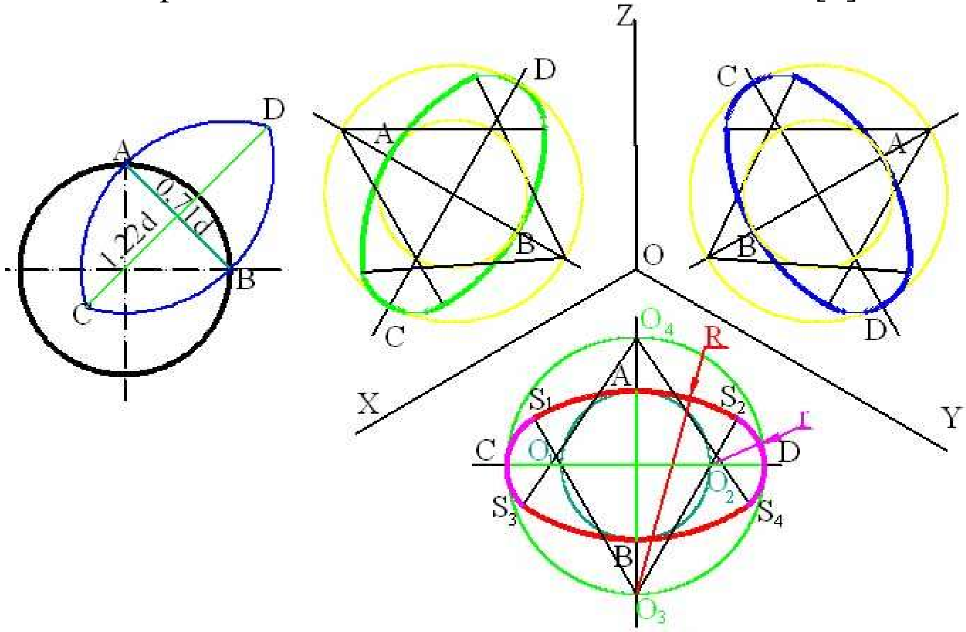
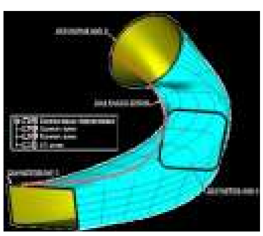
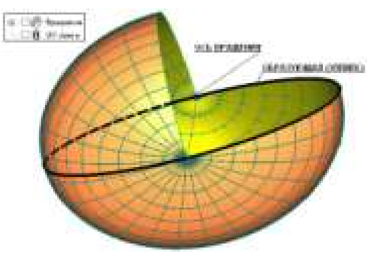
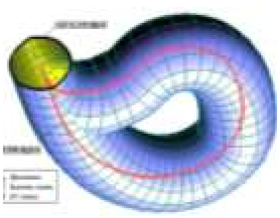
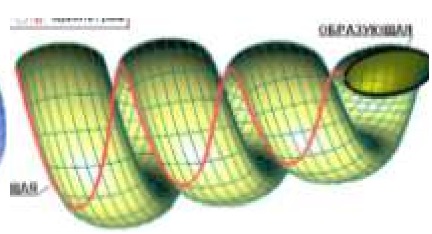


Рис. 68

2. Кривые поверхности

Многообразие форм поверхностей создает большие трудности при их изучении. Для того, чтобы обеспечить процесс изучения поверхностей, целесообразно осуществить их систематизацию, распределив все поверхности по классам и подклассам.

К сожалению невозможно разработать применяемую для всех возможных случаев классификацию поверхностей. Внутри каждого способа образования поверхностей существует своя база для систематизации, например, в кинематическом способе образования поверхностей вполне естественно в основу систематизации положить вид образующей и закон ее перемещения.

Поверхности могут быть заданы различным образом. В инженерной практике поверхность задается чертежом, иногда уравнением. Составлением уравнений поверхностей занимается аналитическая геометрия, при этом она рассматривает поверхность как геометрическое место точек, координаты которых удовлетворяют ее уравнению (превращают его в тождество).

Рассмотрением способов построения обратимых чертежей занимается начертательная геометрия. Начертательная геометрия рассматривает поверхность как геометрическое место последовательных положений образующей линии, непрерывно перемещающейся в пространстве по определенному закону. Образующая линия при своем движении может оставаться неизменной, а может и менять свою форму.

Такой способ образования поверхности называется кинематическим, а сама поверхность – кинематической. Он удобен для определения условий задания поверхности в пространстве и построения ее проекций на комплексном чертеже.

Для того, чтобы построить чертеж поверхности необходимо предварительно выявить ее определитель.

Определителем поверхности называют совокупность всех условий, задающих поверхность в пространстве.

В общем случае поверхность может быть образование несколькими способами, а поэтому может иметь несколько определителей. Обычно из всех способов образования поверхности выбирают простейший. Определитель поверхности состоит из двух частей:

– геометрической части, которая состоит из конечного числа постоянных элементов (точек и линий) на поверхности, то есть перечень линий, участвовавших в образовании;

– алгоритма – пространственных операций, которые необходимо осуществить постоянными элементами определителя, чтобы построить переменные элементы (любые точки и линии) поверхности, то есть указать на взаимосвязь между заданными линиями.

Поверхность на чертеже задают проекциями геометрической части ее определителя. При этом вторую, алгоритмическую, часть определителя превращают в алгоритм графических операций, которые необходимо осуществить над проекциями постоянных элементов определителя, чтобы построить проекции переменных элементов (любых точек и линий) поверхности.

Поверхность считается заданной на комплексном чертеже проекциями геометрической части ее определителя, если по одной проекции точки, принадлежащей поверхности, можно построить ее вторую проекцию.

Рассмотрим примеры выявления определителя для некоторых простейших поверхностей:

Через три точки A, B, C, не лежащие на одной прямой, можно провести плоскость Σ и при том только одну (рис. 69).

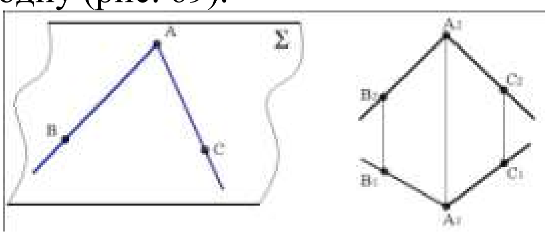


Рис. 69

Точки A, B и C составляют геометрическую часть определителя плоскости. Вторая часть определителя, то есть алгоритм построения в плоскости Σ (A, B, C) любых линий и точек, выражается рассмотренными ранее условиями принадлежности прямой и точки плоскости.

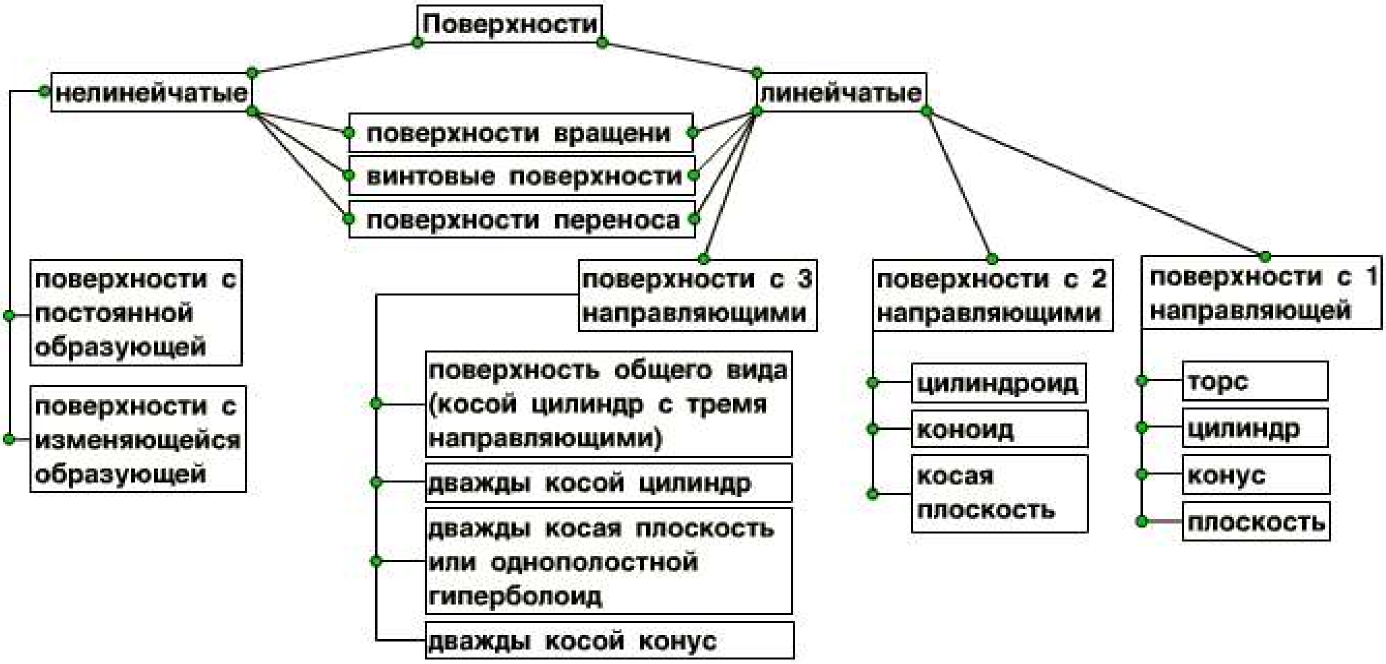
На чертеже плоскость Σ задана проекциями геометрической части своего определителя: $A(A_1, A_2)$; $B(B_1, B_2)$; $C(C_1; C_2)$.

4. **Классификация поверхностей**

В математике под поверхностью подразумевается непрерывное множество точек, между координатами которых может быть установлена зависимость.

В начертательной геометрии фигуры задаются графически, поэтому поверхность рассматривается как совокупность всех последовательных положений некоторой перемещающейся в пространстве линии – кинематический способ образования поверхности.

По содержанию геометрической части определителя поверхности разделяют на два класса. Класс I составляют поверхности, образующие которых – кривые линии. Класс II – поверхности, образованные прямой линией.



При отнесении поверхностей к классам I и II во внимание принималась геометрическая часть определителя – вид линии, образующей поверхность.

Условия алгоритмической части определителя характеризуют закон движения образующей, позволяют выделить из классов I и II поверхностей – три подкласса:

– поверхности параллельного переноса;

– поверхности вращения;

– винтовые поверхности (рис. 70).

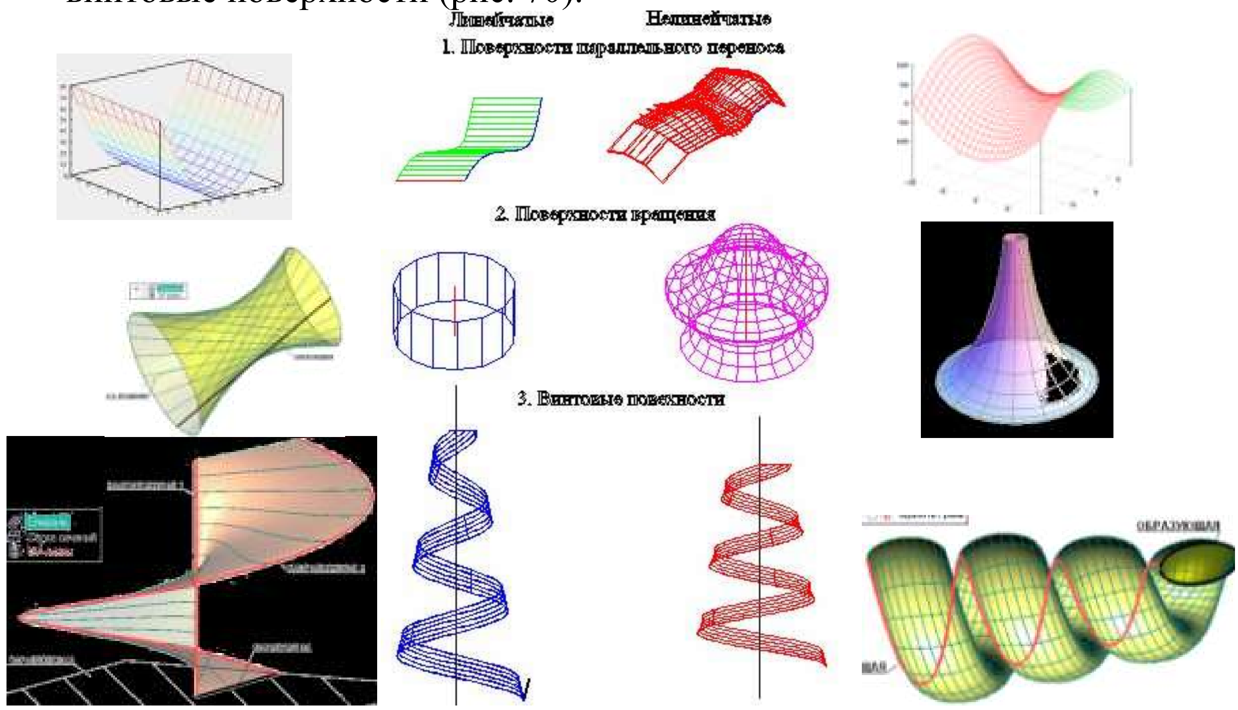


Рис. 70

Каркасом называется множество линий, заполняющих поверхность так, что через каждую точку поверхности в общем случае проходит одна линия каркаса.

Кинематика – (от греч. Kinema – движение). В начертательной геометрии поверхность рассматривается как непрерывное множество последовательных положений линии, перемещающейся в пространстве по определенному закону.

4. Поверхности вращения

Если перемещение образующей линии представляет собой вращение ее вокруг некоторой неподвижной прямой – оси, то образованная в этом случае поверхность называется *поверхностью вращения*.

Определитель поверхности вращения включает образующую и ось вращения. Алгоритмическая часть определителя поверхности вращения состоит из операций вращения точек образующей ***l*** вокруг оси ***i***.

Цилиндр вращения – это поверхность, образованная вращением образующей вокруг параллельной ей оси

Построение очерка проекций поверхности вращения сводится к построению проекции соответствующей линии видимого *контура* (см. сфера). Очерк проекции является границей, отделяющей проекцию поверхности от остальной части плоскости проекций.

Контур поверхности – это линия касания проецирующих лучей с данной поверхности и является границей видимости ее части относительно плоскости проекций (рис. 72).

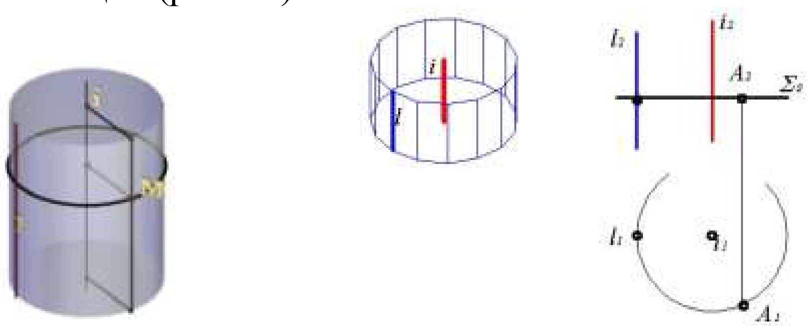


Рис. 71

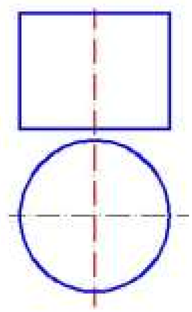


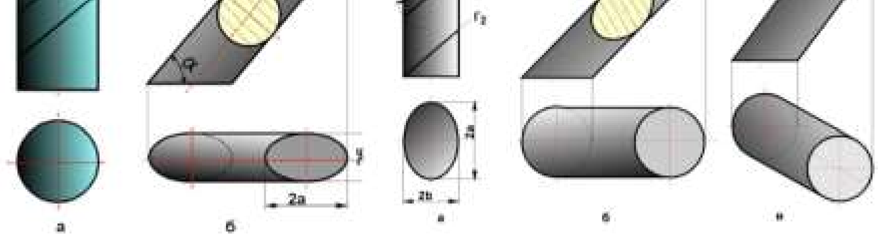
Рис72

Классификация цилиндров вращения

Цилиндр вращения – это часть замкнутой цилиндрической поверхности, заключенной между двумя плоскими параллельными сечениями, называемыми основаниями.

Различают в зависимости от угла наклона оси к основанию: ***прямые*** и ***наклонные*** цилиндры

а также зависимости от вида нормального сечения (сечение перпендикулярно образующей) ***круговые*** и ***эллиптические***



5. Коническая поверхность

Конус вращения может быть образован вращением прямой l, пересекающей ось вращения i, под некоторым углом α. Геометрическая часть определителя состоит из образующей l и оси I (рис. 82). Алгоритм перехода от постоянных элементов определителя к его переменным элементам состоит из указания о том, что поверхность образуется вращением образующей l вокруг оси i. На чертеже конус вращения задан проекциями геометрической части его определителя: $l(l_1, l2)$; $i(i_1, i_2)$; $i \perp \Pi_1$; $l \parallel \Pi_2$; $\varphi(l, i)$.

Конус – часть замкнутой конической поверхности, ограниченной вершиной и какой-либо плоскостью, пересекающей все ее образующие (рис. 83).

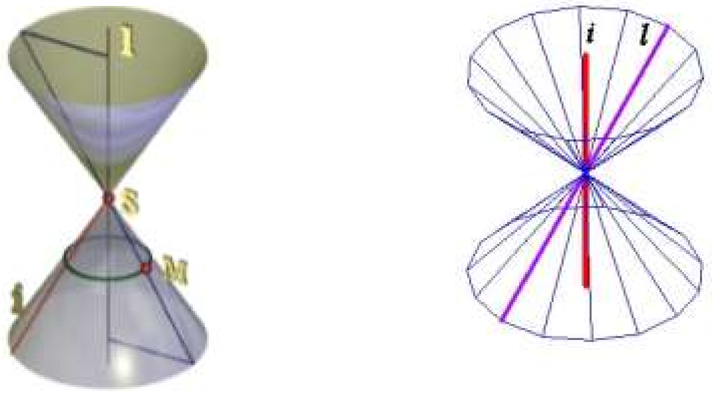


Рис73

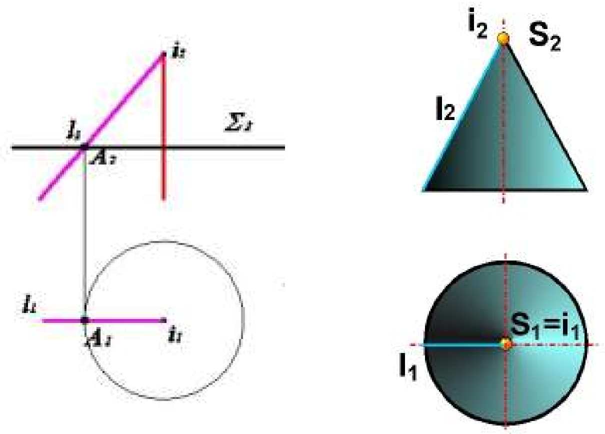
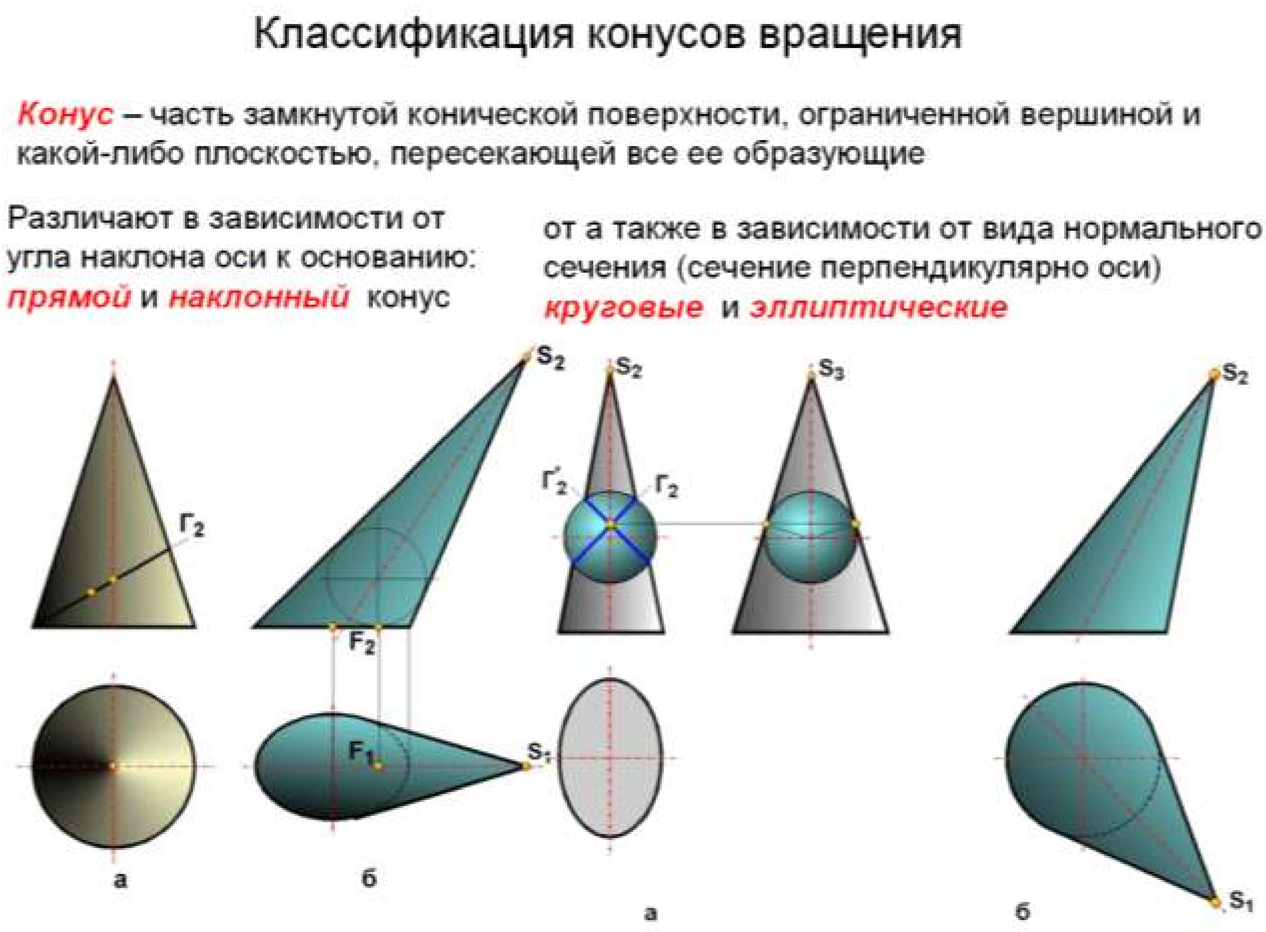


Рис.74



6. Анализ линии сечения цилиндра вращения проецирующими плоскостями

В сечении цилиндра проецирующими плоскостями может получиться окружность, эллипс, прямоугольник.

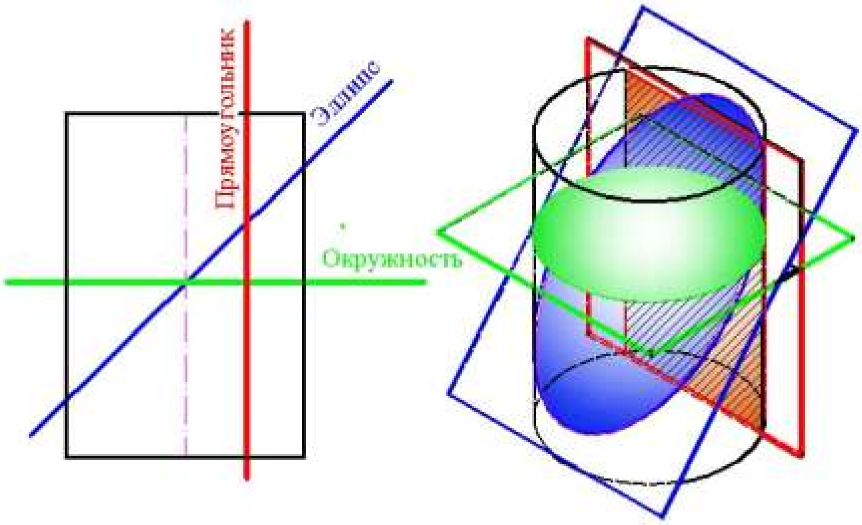


Рис. 75

7. Построение сечения поверхности прямого кругового конуса

Поверхность прямого кругового конуса относится к поверхностям вращения, но мы ее рассмотрим отдельно, так как она занимает особое место среди других

поверхностей вращения. Эта поверхность уникальна, она служит носителем замечательных кривых второго порядка: *окружности, эллипса, параболы* и *гиперболы.* Все перечисленные кривые являются плоскими и могут быть получены в результате сечения конической поверхности плоскостью. Справедливость этих утверждений доказал бельгийский математик Данделеном (1797-1887), который использовал факт равенства отрезков, касательных к сфере, проведенных из одной точки. Этот факт позволил ему установить фокальные и директориальные свойства конических сечений.

Можно установить признаки, обеспечивающие получение в сечении той или иной кривой второго порядка. Для этого обозначим угол наклона образующей к его оси через α. А углом секущей плоскостью и той же осью через β.

Проследим на примерах характер графических построений, которые должны быть выполнены для построения сечения прямого кругового конуса.

Конус вращения – это поверхность, образованная вращением прямолинейной образующей *l* вокруг пересекающейся с ней прямой оси *i*. Это особая поверхность, так как она служит носителем замечательных кривых второго порядка: окружности, эллипса, параболы и гиперболы. Все перечисленные кривые являются плоскими, их называют также коническими.

Эллипс – замкнутая кривая или геометрическое место точек, сумма расстояний которых до двух данных точек имеет некоторое постоянное значение.

Гипербола – это плоская кривая, состоящая из двух разомкнутых симметричных ветвей. Разность расстояний от каждой точки до двух данных – есть величина постоянная.

Парабола – это плоская кривая или множество точек, расстояния которых до данной точки F (фокуса) и до данной прямой DD (директрисы) равны.

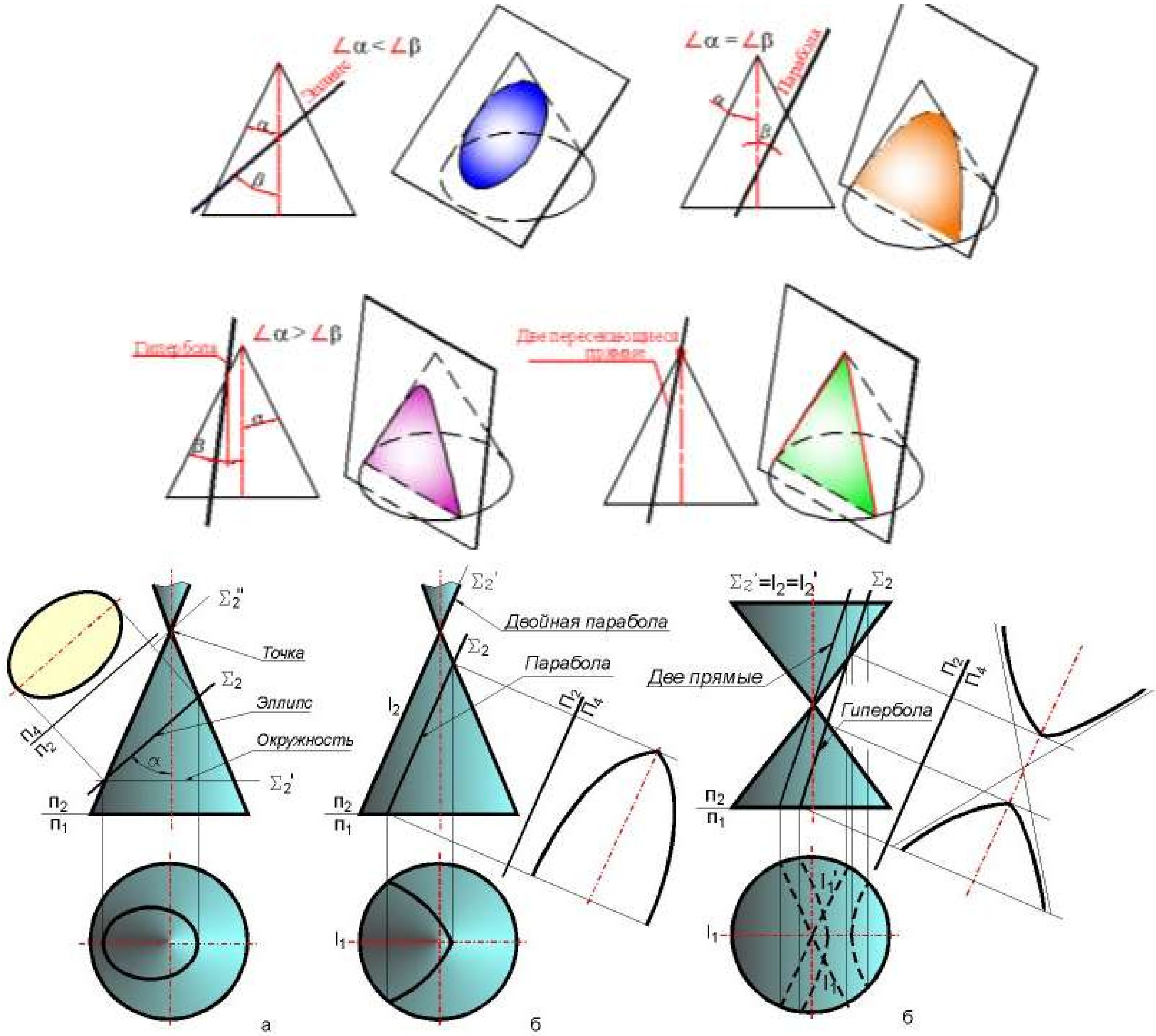
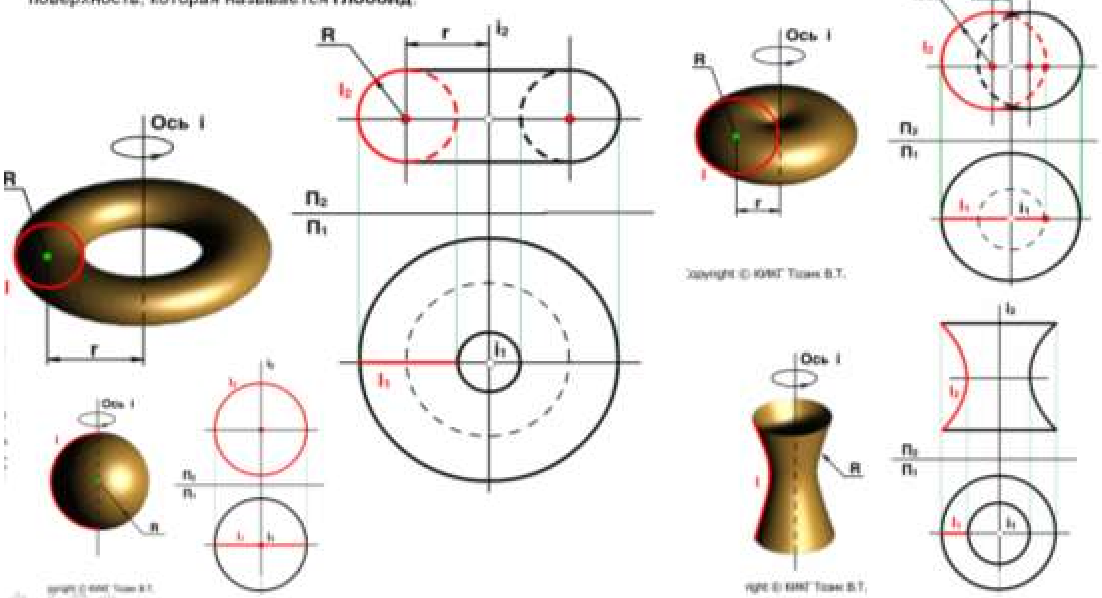


Рис. 76

При вращении окружности вокруг прямой, лежащей в плоскости образующей окружности, образуются **торовые поверхности**. Произвольная прямая пересекает тор в четырех точках, следовательно, это поверхность четвертого порядка. В зависимости от соотношения знаний радиуса образующей окружности **R** и расстояния **r** от центра окружности до оси вращения **i** возможны три разновидности поверхностей:

1. Если $R < r$, то образующая окружность **l** не пересекает ось вращения **i**, поверхность называется кольцом или **открытым тором**.
2. Если $R >$ либо $= R$, то окружность касается оси или пересекает ее, поверхность называется **закрытым тором**.
3. Если $r = 0$, то образуется **сфера**.

При вращении дуги окружности, плоскость которой может в общем случае пересекать ось вращения образуется поверхность, которая называется **глобоид**.



8. Сфера

Сфера – поверхность, которая представляет собой геометрическое место точек

{M}, равноудаленных (на величину Z) от данной постоянной точки O(центра сферы) пространства.

Геометрическая часть определителя сферы состоит из точки O(центра сферы) и точки M, принадлежащей ее поверхности (рис. 77).

Алгоритм построения любой точки сферы заключается в проведении через точку O произвольной прямой и откладывании на ней от точки O отрезка.

$OM^n = OM = r$

При чтении чертежа немаловажную роль играет его наглядность. Для придания чертежу поверхности большей наглядности и выразительности прибегают к построению очерков ее проекции на основании алгоритмической части ее определителя (рис. 78).

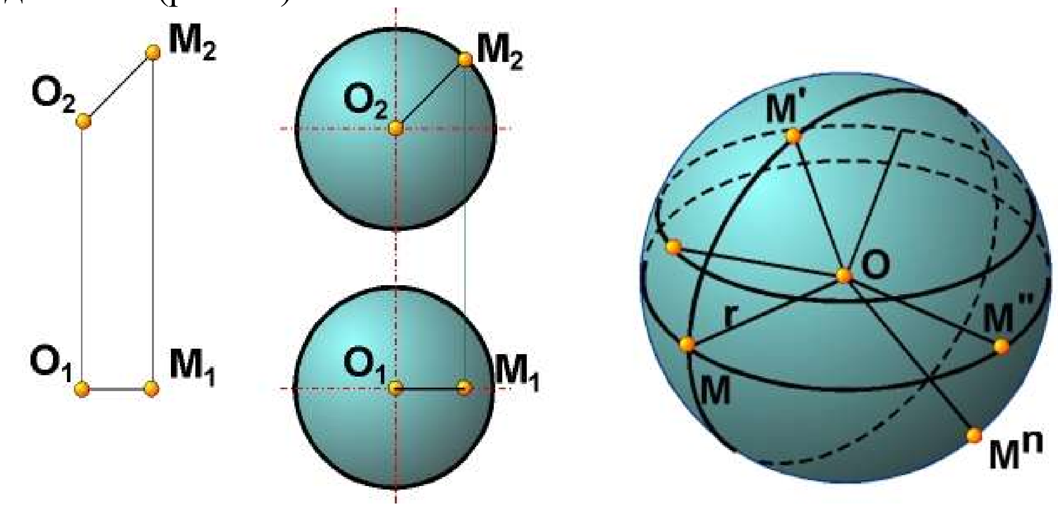


Рис. 77

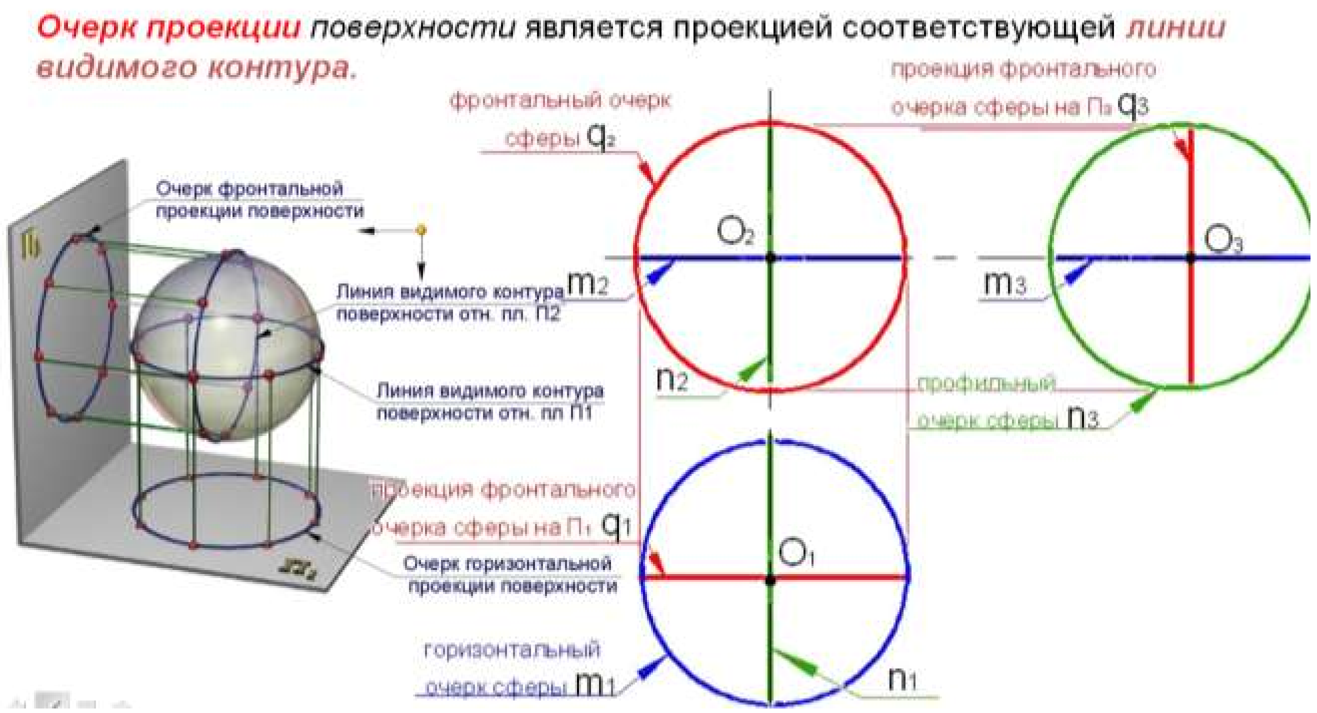


Рис. 78

При проецировании поверхности на какую-либо плоскость проекций часть проецирующих лучей касается ее. Точки касания образуют линию видимого контура поверхности относительно этой плоскости проекций. *Очерк проекции поверхности является проекцией соответствующей линии видимого контура.*

Линия видимого контура поверхности разделяет ее на две части – видимую, обращенную к наблюдателю, и невидимую, *никакая точка поверхности не может спроецироваться за пределы очерка.*

На чертеже сфера задана проекциями геометрической части своего определителя (см. Рис.86). Построен очерк поверхности сферы на рисунке.

Последние, безусловно, обладают большей наглядностью и выразительностью.

Анализ линии сечения сферы вращения

В сечении сферы всегда окружность.

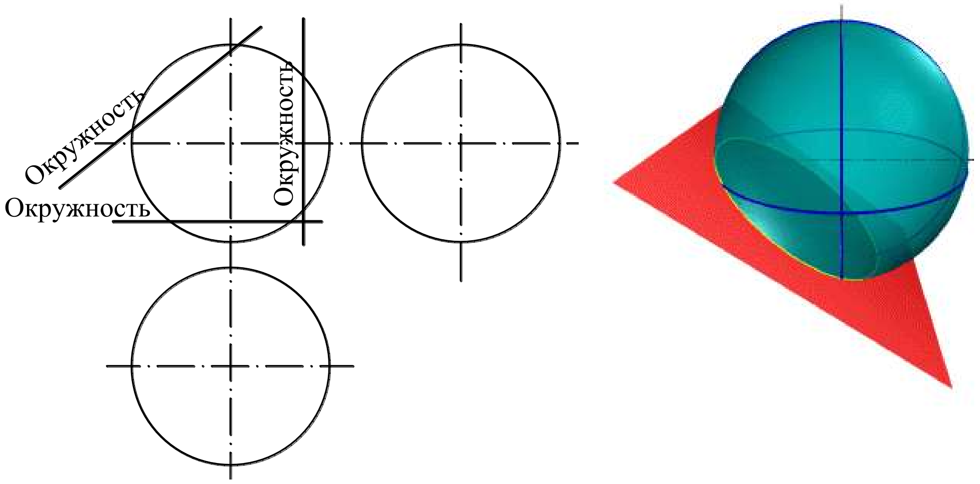


Рис.79

Вырез проецирующими плоскостями кривых поверхностей

Дано непрозрачное геометрическое тело с вырезами, выполненными проецирующими плоскостями . На комплексном чертеже требуется:

1) построить три проекции геометрических и линий сечения их заданными плоскостями;

2) определить видимость элементов геометрических тел и их линий сечения.

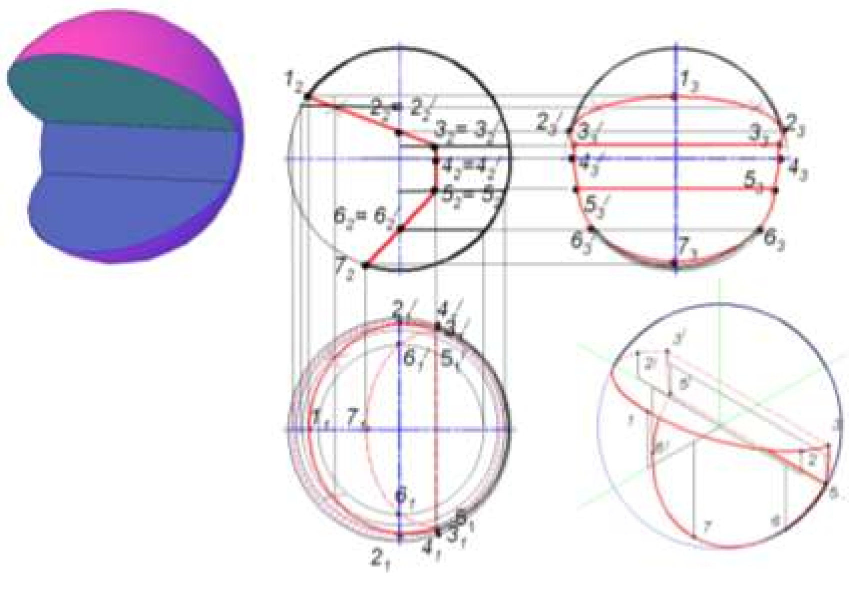


Рис. 81

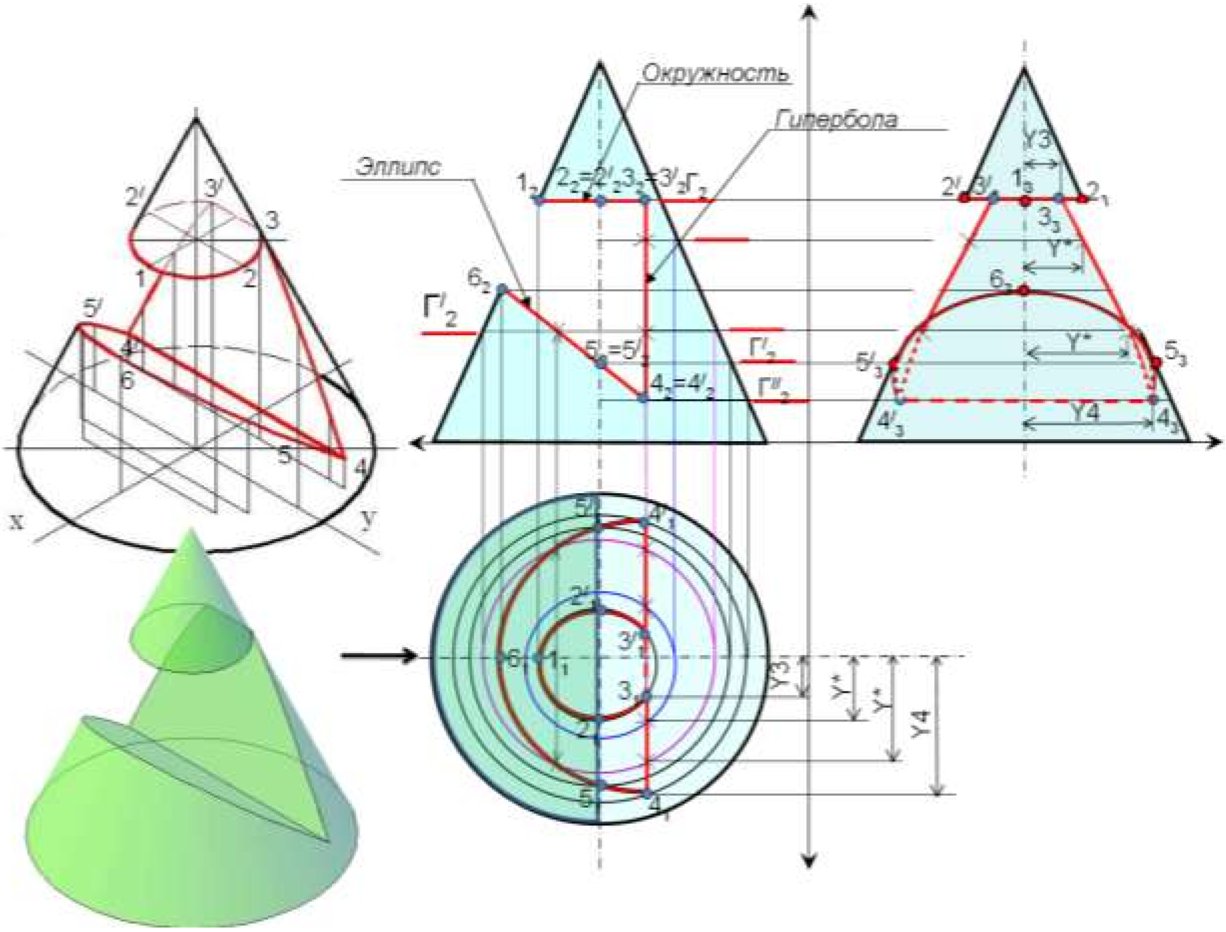


РИС. 80

Построить три проекции и линию сечения цилиндра проецирующими плоскостями

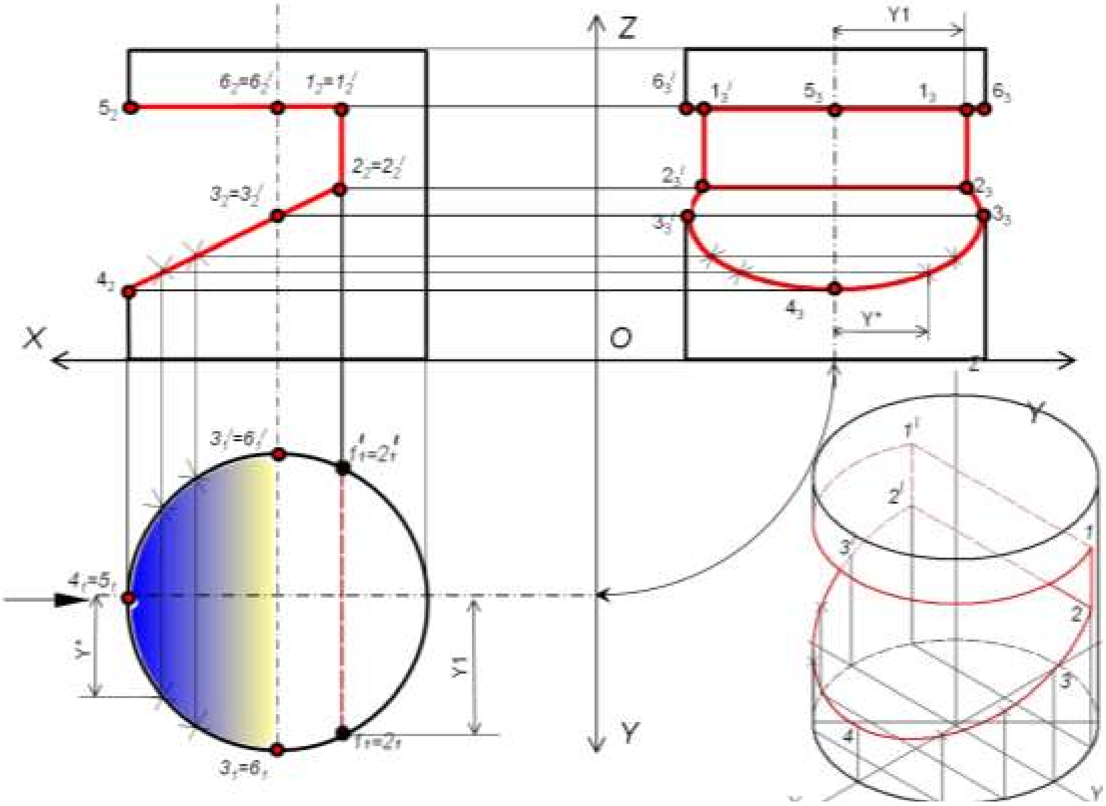


Рис.82

XI. ПОСТРОЕНИЕ ЛИНИИ ПЕРЕСЕЧЕНИЯ ДВУХ ПОВЕРХНОСТЕЙ

1. Метод решения второй позиционной задачи

Две поверхности пересекаются по линии (совокупности линий), которая одновременно принадлежит каждой из них. В зависимости от вида и взаимного положения поверхностей линия их пересечения может быть прямой, плоской, или пространственной ломаной, плоской или пространственной кривой (рис.83).

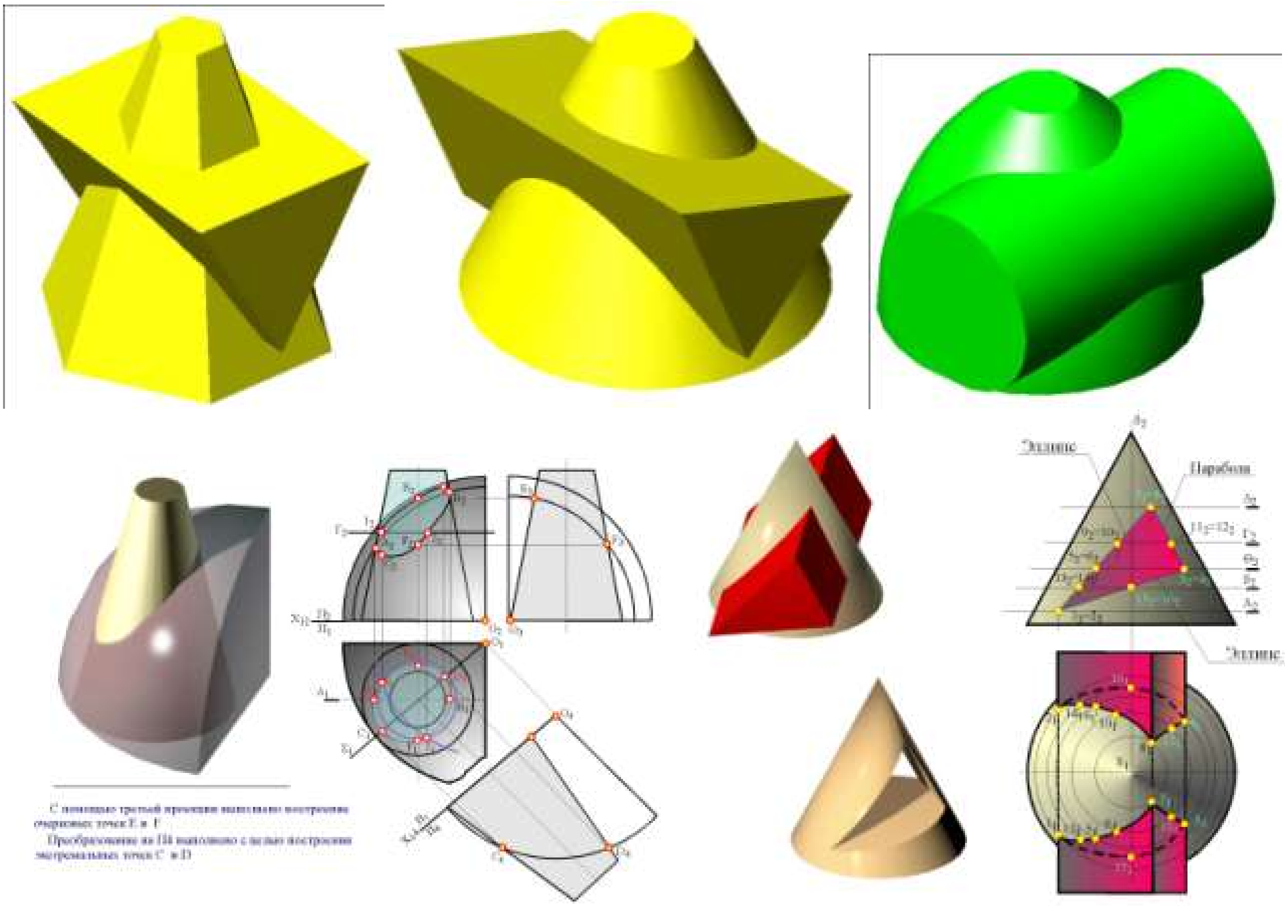


Рис. 83

Построение этой линии независимо от её формы сводится к построению ряда точек, одновременно принадлежащих каждой из пересекающихся поверхностей. Линия, в определённом порядке соединяющая эти точки, и будет искомой. Точки, образующие линии пересечения, разделяются на *опорные* и *промежуточные*. Опорными точками являются:

1) точки, лежащие на участвующих в пересечении рёбрах многогранника;

2) точки, в которых линия пересечения пересекает линию видимого контура поверхности относительно той или иной плоскости проекций; проекции этих точек располагаются на очерковой линии соответствующей проекции и называются *очерковыми*. В этих точках проекция линии пересечения касается очерка поверхности. В случае пересечения поверхности с плоскостью, очерковые точки делят соответствующую им проекцию линии пересечения на видимую и невидимую части, и называются точками смены видимости. При пересечении двух поверхно-

стей (когда ни одна из них не является плоскостью) не каждая из очерковых точек является одновременно и точкой смены видимости;

3) *экстремальные точки*, т. е. самая близкая и самая удалённая точки линии пересечения относительно той или иной плоскости проекций. Экстремальные точки относительно плоскости Π_1 называются высшей и низшей.

Основным способом построения точек, принадлежащих искомой линии пересечения, является способ вспомогательных поверхностей. Сущность его заключается в том, что каждая из искомых точек рассматривается как результат пересечения двух линий, одна из которых является линией пересечения вспомогательной поверхности с одной из заданных, а вторая – линией пересечения той же вспомогательной поверхности с другой из заданных поверхностей.

В соответствии с этим построение произвольных точек К и $К^{/}$, принадлежащих линии ***l*** пересечения поверхностей Φ и Ψ (независимо от их вида), осуществляется по следующей общей схеме (рис. 84).

1. Проводится вспомогательная поверхность Σ, пересекающая заданные поверхности Φ и Ψ.

2. Определяются линии m и n пересечения вспомогательной поверхности Σ с каждой из заданных ($m = \Sigma \cap \Phi$, $n = \Sigma \cap \Psi$).

3. Отмечают точку К пересечения построенных линий m и n, которая и является искомой, так как одновременно принадлежат данным поверхностям Φ и Ψ и, следовательно, линии ***l*** их пересечения.

Краткая запись алгоритма второй позиционной задачи:

$$\{K\ldots\} = \underbrace{(\Sigma \cap \Phi)}_{m} \cap \underbrace{(\Sigma \cap \Psi)}_{n}$$

Многократное применение указанного способа позволяет определить достаточное количество точек (опорных и промежуточных), принадлежащих линии пересечения. При решении конкретной задачи необходимо расшифровать п. 1 общей схемы (составить алгоритм), т.е. указать, какие именно вспомогательные поверхности (по виду и положению) нужно применить для построения опорных и промежуточных точек линии пересечения.

В качестве вспомогательных поверхностей могут быть выбраны плоскость, сферическая, цилиндрическая или коническая поверхности.

Выбор вида и положения вспомогательных поверхностей определяется в основном следующими тремя соображениями.

1. Необходимостью определить положение целого ряда опорных точек линии пересечения.

2. Любая из вспомогательных поверхностей должна пересекать каждую из заданных по таким линиям, проекции которых были бы, как правило, графически простыми линиями, т.е. прямыми или окружностями. Все вспомогательные поверхности должны пересекать заданные в пределах зоны возможного расположения линии пересечения во избежание лишних построений.

При решении конкретной задачи необходимо расшифровать пункт 1 общей схемы (составить алгоритм), то есть указать какие именно вспомогательные поверхности (по виду и положению) нужно применять для построения необходимых опорных и промежуточных точек линии пересечения. В качестве вспомогательных поверхностей могут быть выбраны плоскость, сферическая, цилиндрическая, коническая поверхности. Наиболее часто применяются плоскости (способ вспомогательных плоскостей) или сферы (способ вспомогательных сфер).

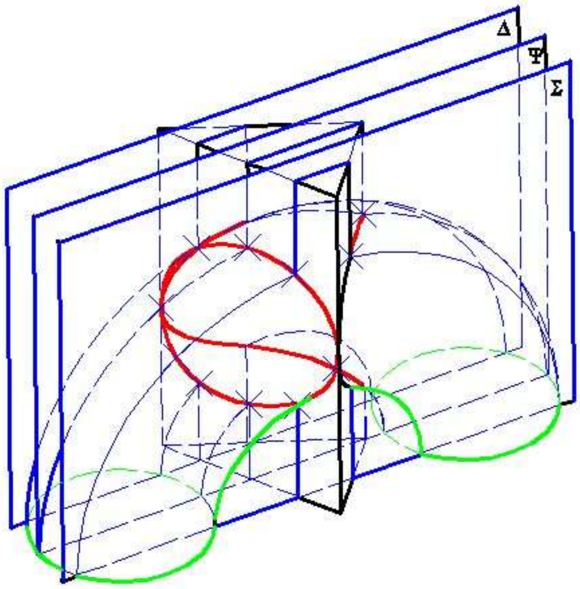


Рис. 84

2. Построение линии пересечения многогранных поверхностей

Задача. *Построить линию пересечения двух пирамид. Определить видимость очерка и линии сечения* (рис. 98).

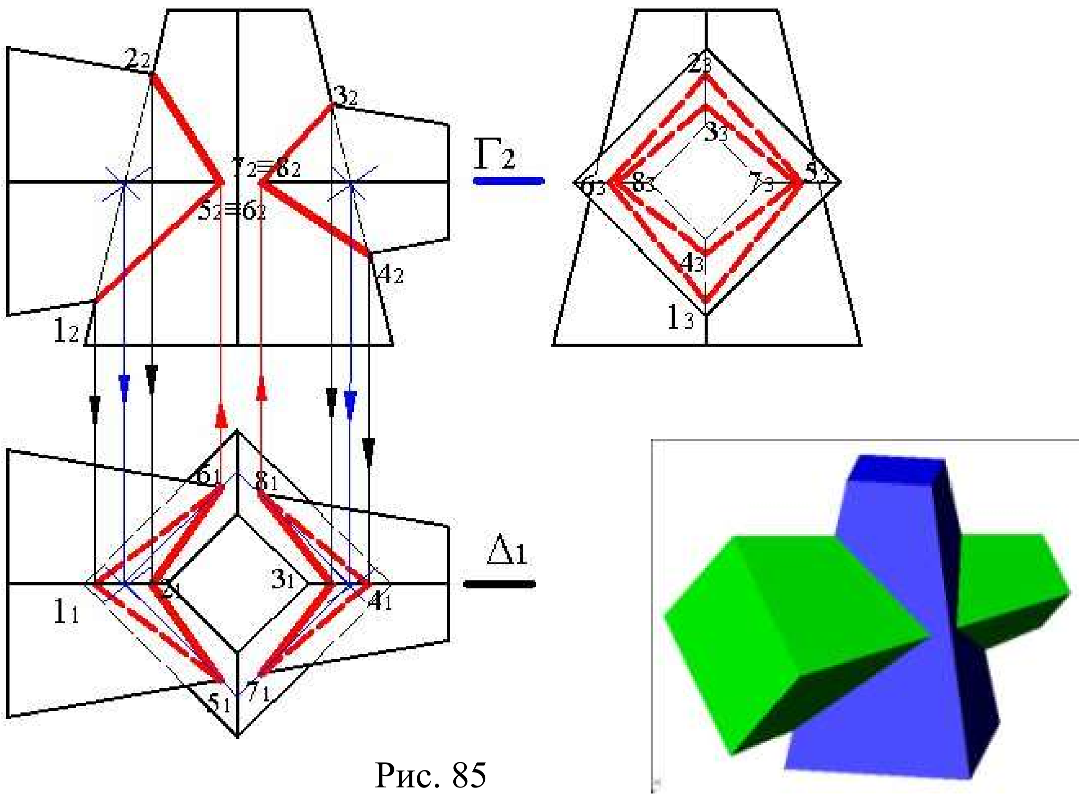


Рис. 85

1. Опорные точки расположены на ребрах многогранника. Так поверхности имеют общую плоскость симметрии Δ относительно $П_2$, то пересечение фронтальных очерков дают проекции опорных точек линии пересечения – 1_2, 2_2, 3_2, 4_2, которые затем достроим на $П_1$.

2. Точки 5-8 получены в результате сечения многогранников вспомогательной секущей плоскостью Г (линия сечения параллельна основанию). На плоскости $П_1$ получены проекции точек 5_1, 6_1, 7_1, 8_1. После этого строим проекции этих точек на $П_2$ ($5_2≡6_2$, $7_2≡8_2$).

3. Проекции точек $5_2≡6_2$, $7_2≡8_2$ являются точками смены видимости для плоскости $П_1$.

3. Построение линии пересечения многогранной и кривой поверхностей

Задача. *Построить линию пересечения призмы и тора. Определить видимость очерка и линии сечения* (рис. 86).

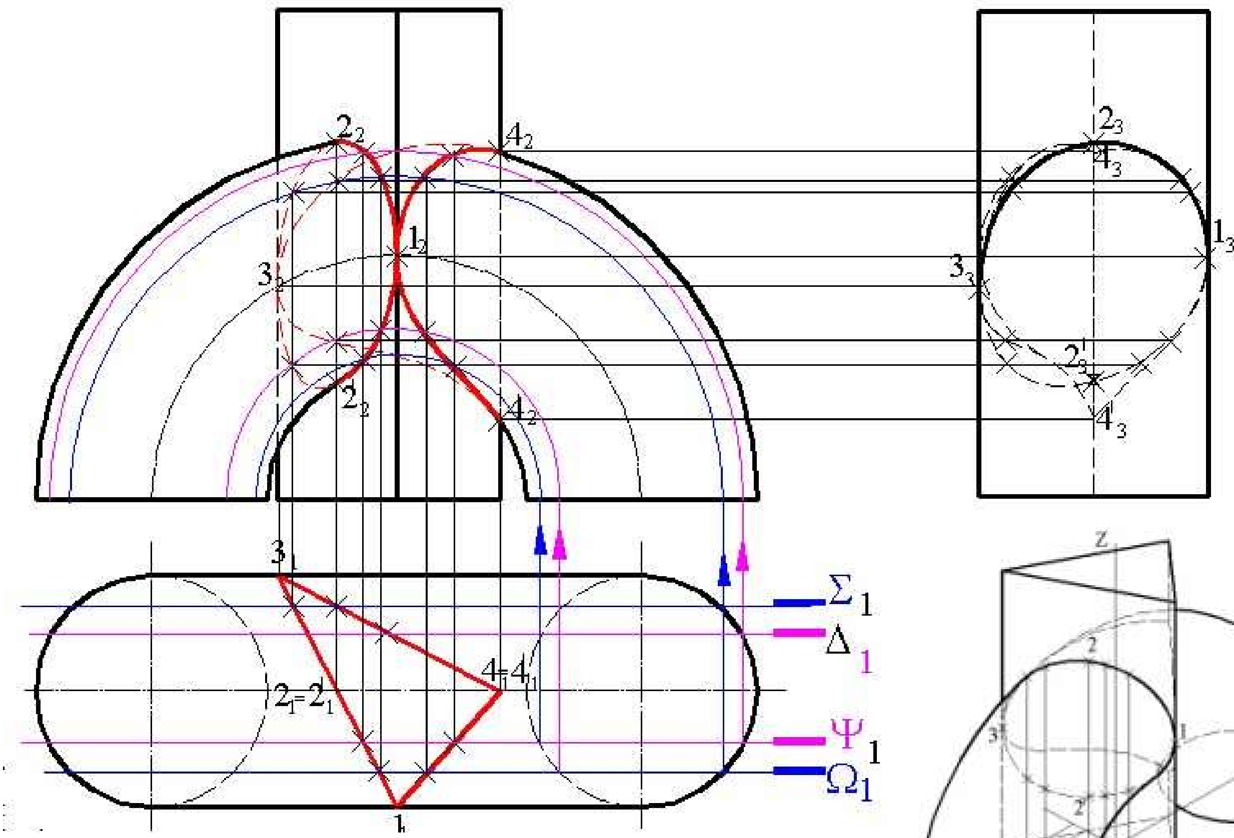
Построение линии сечения.

1. Линия сечения данных поверхностей выстроена на $П_1$, так как в пересечении участвует призма, поэтому все точки, в том числе и линии сечения, совпадают с очерком основания призмы.

2. Через все опорные и промежуточные точки проводим вспомогательные плоскости уровня (Σ, Δ, Ψ, Ω), которые рассекут тор по окружностям, радиус которых определяется расстоянием от оси тора до его очерка (см. Рис.97).

3. Проводим линии связи через проекции опорных и промежуточных точек до соответствующих им линий сечения.

4. Точки смены видимости $2_1=2'_1$, $4_1=4'_1$.



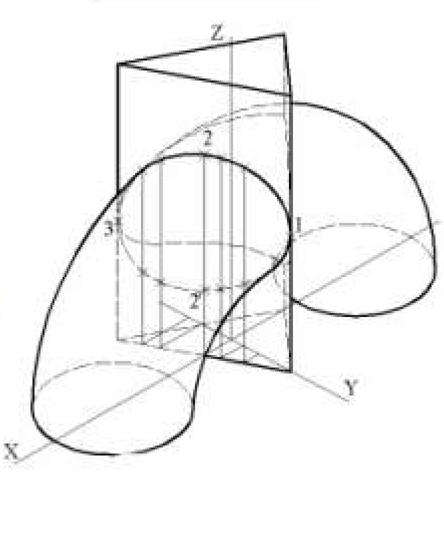
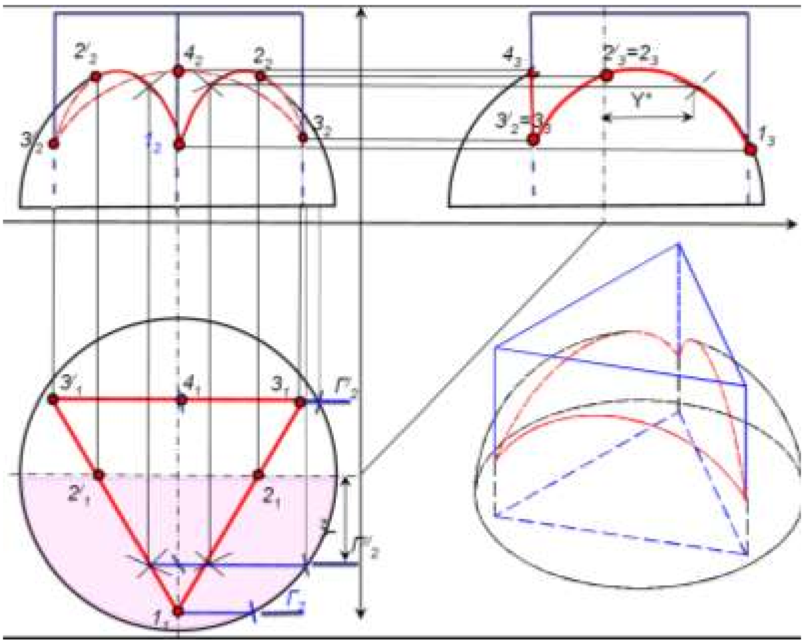


Рис. 86



4. Построение линии пересечения кривых поверхностей

Задача. *Построить линию пересечения конуса и цилиндра. Определить видимость очерка и линии сечения* (рис. 87).

.

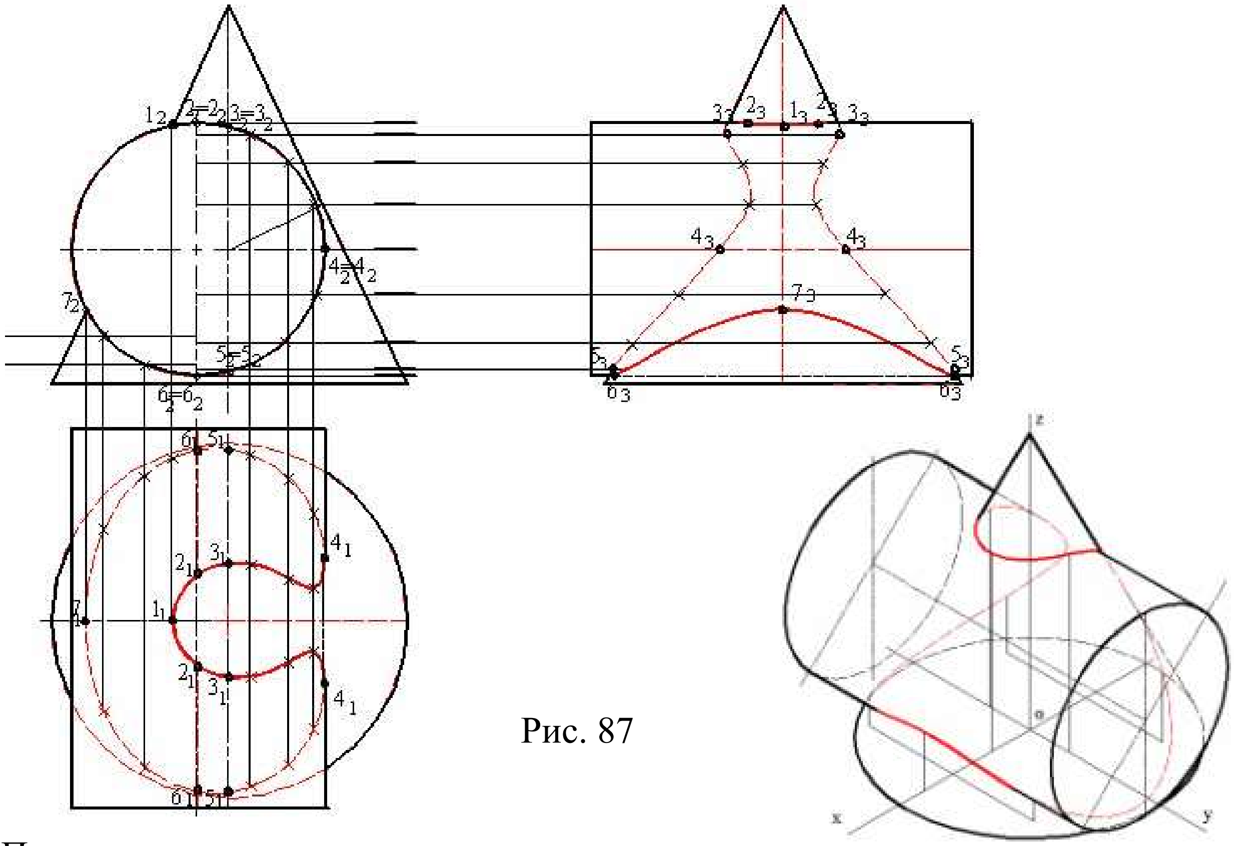


Рис. 87

При построении линии пересечения двух кривых поверхностей второго порядка линия пересечения будет кривой четвертого порядка.

В данной задаче она совпадает с очерком основания цилиндра. Поэтому все опорные точки определяются на $П_2$. Через них проводим вспомогательные плоскости уровня, которые рассекут конус по окружностям, радиус которых определяется расстояние от оси до очерка

XII. ОСОБЫЕ СЛУЧАИ ПЕРЕСЕЧЕНИЯ ПОВЕРХНОСТЕЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Линия пересечения двух поверхностей второго порядка в общем случае представляет кривую четвертого порядка.

1. При взаимном пересечении поверхностей вращения второго порядка получается в некоторых случаях распадение линии пересечения на две плоские кривые второго порядка. Это бывает в тех случаях, когда обе пересекающиеся поверхности вращения (цилиндр и конус, два конуса, эллипсоид и конус) описаны вокруг общей для них сферы. Изображенные линии пересечения проецируются на фронтальную плоскость проекций в виде прямолинейных отрезков, так как общая плоскость симметрии расположена параллельно Π_2 (рис. 88)

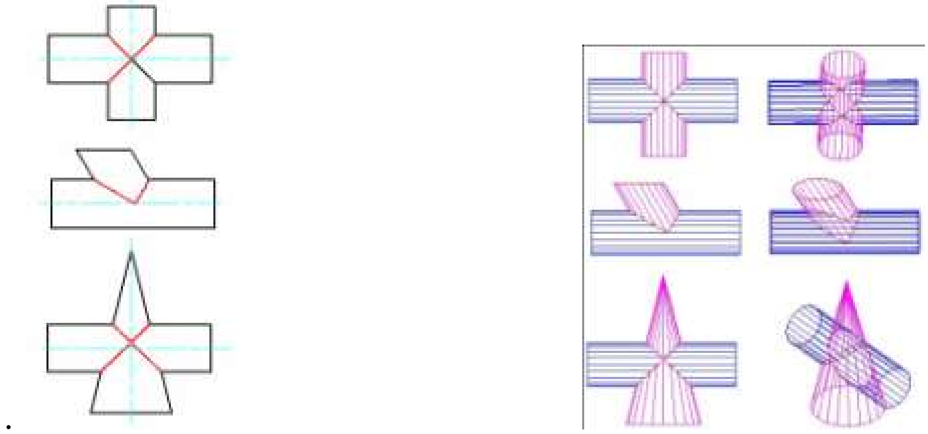


Рис. 88

2. Соосные поверхности вращения (то есть поверхности с общей осью) пересекаются по окружностям.

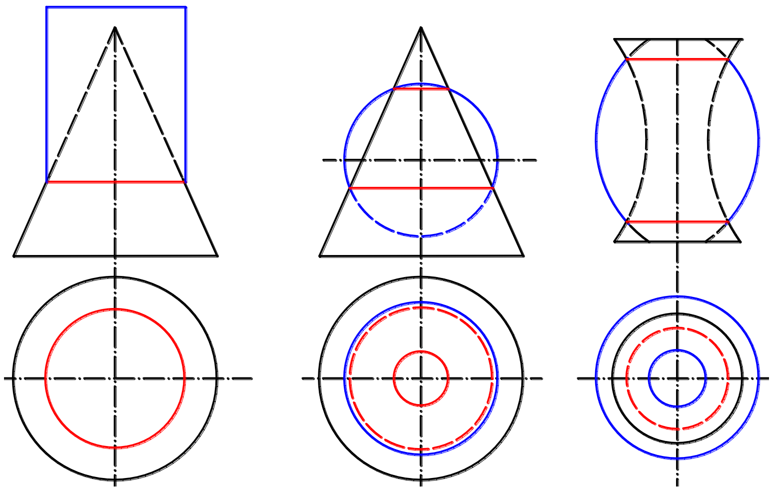


Рис. 89

Во всех примерах даны лишь фронтальные проекции, причем общая ось поверхностей расположена параллельно плоскости Π_2. Поэтому окружности, получаемые при пересечении плоскостей проецируются на Π_2 в виде прямолинейных отрезков.

XIII. ПРИМЕНЕНИЕ ВСПОМОГАТЕЛЬНЫХ СЕКУЩИХ СФЕР

1. Способ концентрических сфер

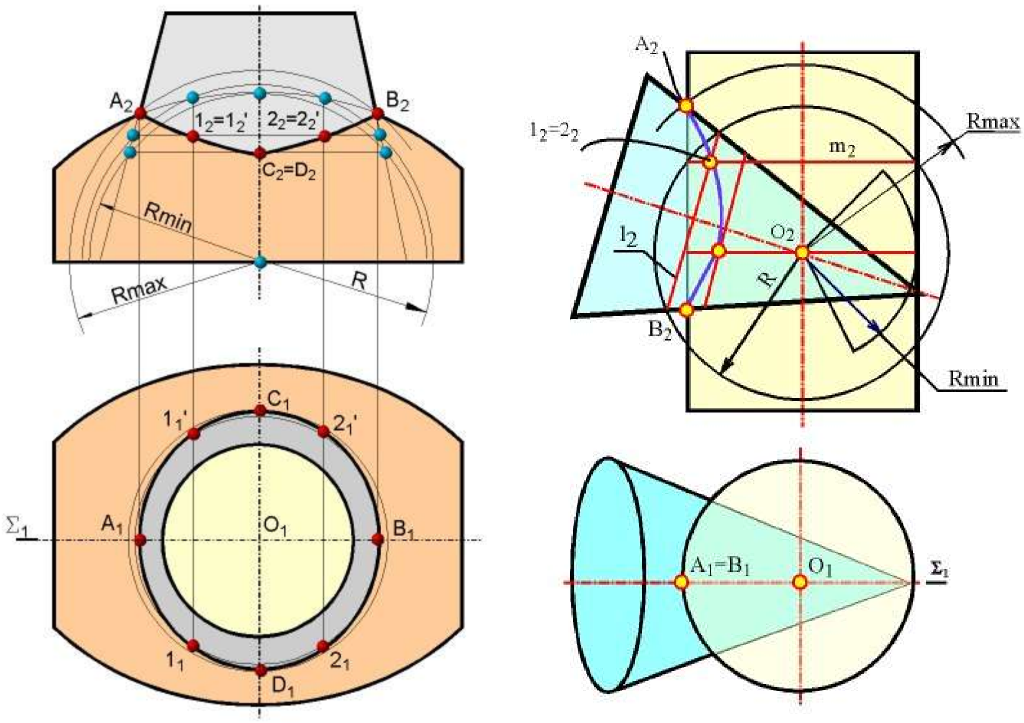


Рис. 90

Если оси поверхностей вращения пересекаются и лежат в плоскости, параллельной одной из плоскостей проекций, то для построения линии их пересечения могут быть использованы сферы с различными радиусами, центр которых находится в точке пересечения осей данных поверхностей.

При этом минимальный радиус R_{min} равен наибольшему из перпендикуляров, опущенных из проекции центра сферы на очерки поверхностей вращения, а максимальный радиус R_{max} равен отрезку, выражающему расстояние от проекции центра сферы до наиболее удаленной точки пересечения очерковых образующих

. Алгоритм построений:

1) найти точку пересечения осей вращения – центр вспомогательных сфер;

2) обозначить точки пересечения главных меридианов исходных поверхностей;

3) определить радиус наибольшей вспомогательной сферы R_{max}. Его величина равна расстоянию от центра до наиболее удаленной от него точки пересечения главных меридианов;

4) найти радиус наименьшей сферы, провести очерк сферы R_{min}. Она касается по окружности одной исходной поверхности и пересекает по двум окружно-

стям другую поверхность. Построить проекции этих окружностей (это отрезки прямых) и отметить точки их пересечения.

Взять промежуточную сферу. Она пересекает исходные поверхности окружностями. Построить проекции окружностей и отметить их точки пересечения. Проекции окружностей – отрезки прямых.

2. Способ эксцентрических сфер

При построении линии пересечения поверхности вращения с циклической поверхностью, несущей на себе каркас окружностей, либо двух поверхностей вращения, оси которых не пересекаются, но поверхности имеют общую плоскость симметрии, параллельную плоскости проекции, в качестве вспомогательных поверхностей можно брать сферы, центры которых не совпадают, то есть эксцентрические сферы (рис. 91).

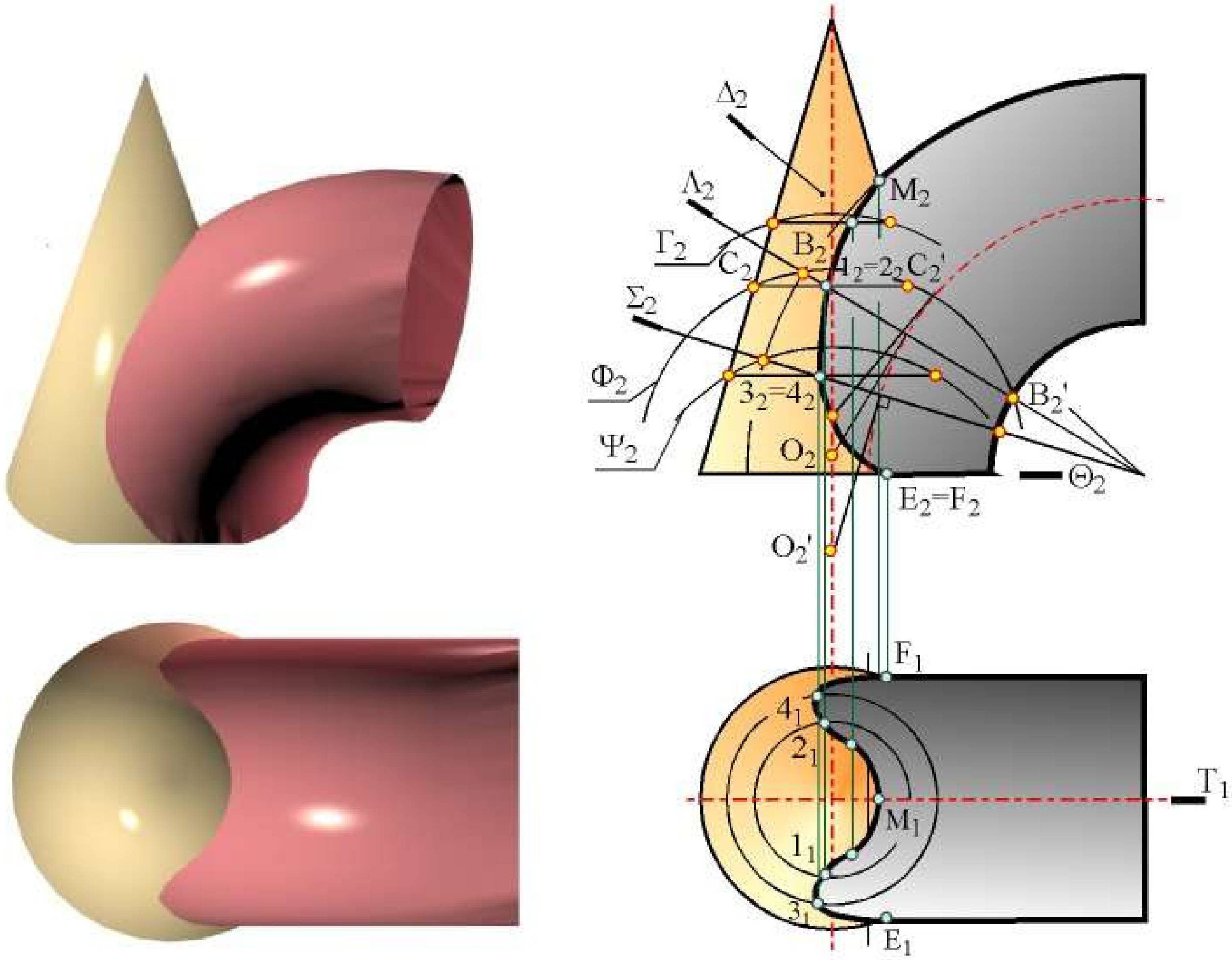


Рис. 91

Построение следует выполнить на той плоскости проекций, которой параллельна плоскость симметрии, и где проекции окружностей – отрезки прямых, по следующему алгоритму:

1) отметить точки пересечения главных меридианов, очерков проекций поверхностей;

2) в области пересечения поверхностей взять на одной поверхности (торе, кольце, циклической поверхности, эллиптическом цилиндре или эллиптическом конусе) окружность;

3) из центра этой окружности к ее плоскости провести перпендикуляр до пересечения с осью вращения другой поверхности. Это центр вспомогательной сферы;

4) определить радиус вспомогательной сферы. Его длина равна расстоянию от центра сферы до точек выбранной окружности;

5) провести вспомогательную сферу и найти окружности, по которым сфера пересекает другую поверхность;

6) найти точки пересечения этих окружностей с выбранной вначале (построение повторить с п. 2).

VII. СПОСОБЫ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ КОМПЛЕКСНОГО ЧЕРТЕЖА

В большинстве случаев степень решения задачи зависит не только от ее условия, сколько от положения заданных геометрических образов относительно плоскостей проекций. Во всех случаях, когда заданные геометрические образы являются проецирующими, решение задачи как правило упрощается. Такое положение геометрических образов относительно плоскостей проекций, при котором мы непосредственно по чертежу получаем ответ на поставленный в задаче вопрос, является наивыгоднейшем.

Например, по чертежу на рисунке 92а можно сразу определить расстояние между параллельными прямыми a и b, а по чертежу 63б этого сделать нельзя.

➢ Таким образом, при решении той или иной задачи бывает целесообразно преобразовать чертеж так, чтобы заданные геометрические образы оказались в наивыгоднейшем положении относительно плоскостей проекций. Для этого существуют различные способы преобразования комплексного чертежа. Каждый из них основан на одной из следующих принципов:

➢ измени положения плоскостей проекций относительно неподвижных геометрических образов;

➢ изменение положения заданных геометрических образов относительно плоскостей проекций;

➢ изменение направления проецирования, то есть замене ортогонального проецирования геометрического образа косоугольным или центральным на одну из плоскостей проекций.

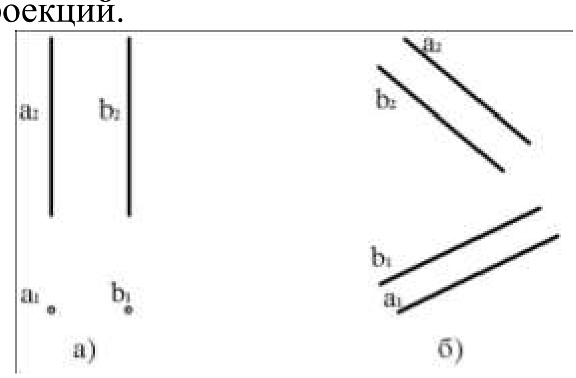


Рис. 92

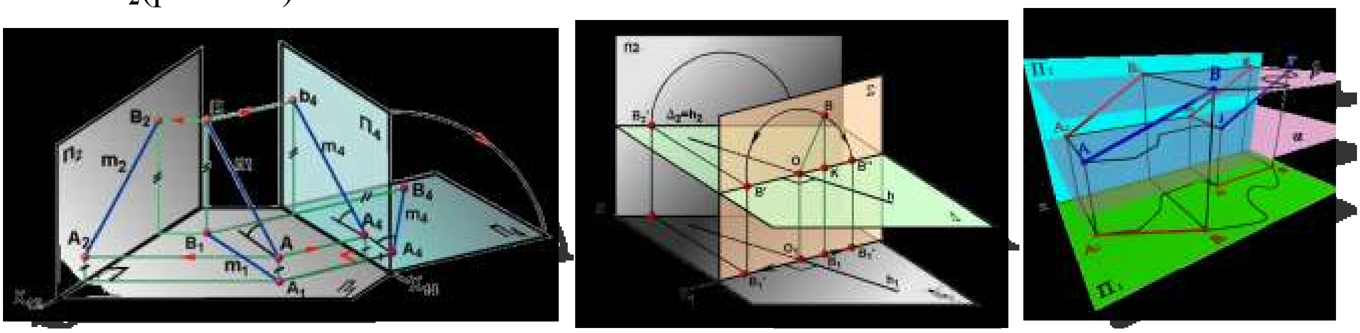
Преобразование комплексного чертежа может быть осуществлено следующими способами.

1. Способ замены плоскостей проекций, при котором оставляют неизменным положение оригинала в пространстве, а заменяют одну или области проекций так, чтобы интересующие нас прямые или плоскости оказались бы в частном положении по отношению к новой системе плоскостей проекций (рис. 93а).

2. Способ вращения, при котором оставляют неизменной систему плоскостей проекций, а меняют положение оригинала в пространстве путем его вращения вокруг одной или последовательно вокруг двух подходящим образом выбранных осей так, чтобы интересующие нас прямые или плоскости оказались бы в частном положении по отношению к данной системе плоскостей проекций (рис. 93б)..

3. Способ плоско-параллельного перемещения

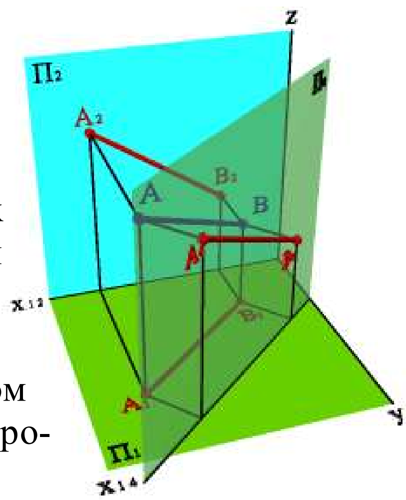
При использовании способа параллельного движения фигуры приводится в частное положение перемещением в пространстве относительно неподвижной системы плоскости проекции **$П_1$**, **$П_2$** и находим новые проекции фигуры на **$П_1$** и **$П_2$**(рис. 93в).



а) б) в)

Рис. 93

1. Способ замены плоскостей проекций



Сущность способа состоит в том, что одну из заданных плоскостей проекций ($П_1$ или $П_2$) заменяют новой плоскостью проекций ($\overline{П_1}$ или $\overline{П_2}$). При этом положение второй плоскости проекций и заданных геометрических образов остается неизменным Новая плоскость проекций $\overline{П_1}$ или $\overline{П_2}$ выбираются с таким расчетом, чтобы она имела частное положение по отношению к рассматриваемому геометрическому образу, и была бы при этом перпендикулярной к другой незаменяемой плоскости проекций.

Таким образом, исходная (старая) система плоскостей $X\frac{П_2}{П_1}$ может быть преобразована в новую систему $X_1\ \frac{\overline{П}_2}{П_1}$ при замене плоскости $П_2$ плоскостью $\overline{П}_2 \perp П_1$ или в систему $X_1\ \frac{П_2}{\overline{П}_1}$ при замене плоскости $П_1$ плоскостью $\overline{П}_1 \perp П_2$.

Каждая из этих полученных систем может быть преобразована в новую путем замены плоскости проекций, не заменявшейся в предыдущем преобразовании. Таким образом, система $X_1\ \frac{П_2}{\overline{П}_1}$ может быть преобразована в систему $X_2\ \frac{\overline{П}_2}{\overline{П}_1}$ при замене плоскости $П_2$ плоскостью $\overline{П}_2 \perp \overline{П}_1$, а система $X_1\ \frac{\overline{П}_2}{П_1}$ в систему $X_2\ \frac{\overline{П}_2}{\overline{\overline{П}}_1}$ при замене плоскости $П_1$ плоскостью $\overline{\overline{П}}_1 \perp \overline{П}_2$.

Такое последовательное преобразование исходной системы плоскостей проекций позволяет получить новую систему, в которой рассматриваемые геометрические образы окажутся в наивыгоднейшем положении для решения поставленной задачи.

Большинство задач решается с применением одного или двух последовательных преобразований исходной системы плоскостей проекций.

Все свойства геометрических образов и их изображений, ранее рассмотренные в исходной системе $X\frac{П_2}{П_1}$, справедливы и для новой системы плоскостей проекций.

Рассмотрим закономерности, позволяющие по чертежу объекта, выполненного в старой системе, построить чертежи в новой системе.

2. Замена фронтальной плоскости проекций

(Преобразование системы $X\frac{П_2}{П_1} \rightarrow X_1\ \frac{\overline{П}_2}{П_1}$)

Пусть в системе $X\frac{П_2}{П_1}$ дана точка А и указаны ее проекции $А_1$ и $А_2$ (рис. 64). Заменим фронтальную плоскость проекций $П_2$ на новую плоскость проекций $\overline{П}_2$ $П_1$, то есть переходим от одной системы плоскости проекций к другой $X\frac{П_2}{П_1}$ $\rightarrow X_1\frac{\overline{П}_2}{П_1}$.

Условно будем показывать новую плоскость $\overline{П}_2$ тоже фронтальной, образующей с плоскостью $П_2$ некоторый угол (в случае проецирования точки этот угол не перпендикулярен, а произволен). Новую плоскость проекций располагают в произвольном месте и направлении (по перпендикуляру к плоскости $П_1$), так как нет дополнительных ограничений для выбора ее положения (рис. 94).

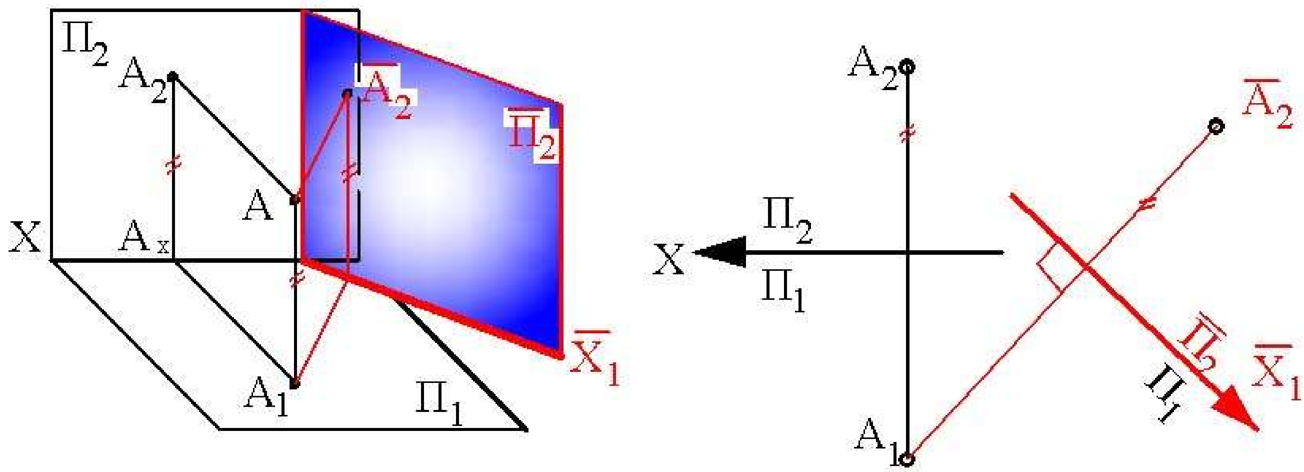


Рис. 94

Плоскость $П_1$ является общей для старой и новой систем плоскостей проекций.

В новой системе плоскостей проекций $X\frac{\overline{П_2}}{П_1}$ имеем $\overline{X_1}=П_1\cap\overline{П_2}$ – новая ось проекций образования пересечением двух плоскостей $П_1$ и $\overline{П_2}$.

A_1 и $\overline{A_2}$ – ортогональные проекции точки А. При этой замене $X\frac{П_2}{П_1}\rightarrow X_1\frac{\overline{П_2}}{П_1}$ остаются неизменными (являются инвариантным преобразованием):

– горизонтальная проекция A_1 точки А;

– высота точки А, то есть Z_A, $AA_1=A_2A_X=A_X\overline{A_2}=Z_A$, так как точка А и плоскость $П_1$ не меняли своего положения в пространстве.

Чтобы перейти от пространственной модели к комплексному чертежу, необходимо совместить плоскость $\overline{П_2}$ с плоскостью чертежа. Метод перемены плоскостей проекций предусматривает совмещение новой плоскости с той из старых плоскостей, по отношению к которой она перпендикулярна. Совмещаем $\overline{П_2}\rightarrow П_1$.

За ось вращения принимается новая ось проекций X_1. направление поворота не оказывает никакого влияния на результат преобразования. Поворот следует делать так, чтобы новые проекции не накладывать на старые.

Выявленные инвариантные преобразования позволяют построить по комплексному чертежу точки в старой системе плоскостей проекций ее комплексный чертеж в новой системе.

1. Для этого не комплексном чертеже точки $A(A_1,A_2)$ проводим новую ось проекций $\overline{X1}$, учитывая, что ее положение и направление не ограниченно дополнительными условиями.

2. Затем проводим новую линию связи $A_1\overline{A2}\perp\overline{X1}$.

3. От новой оси $\overline{X1}$ на линии связи $A_1\overline{A2}$ откладываем расстояние $A_{X1}\overline{A2}$ = $A_XA_2 = Z_A$.

Полученная точка $\overline{A2}$ является проекцией точки A на плоскость $\overline{П2}$. В новой системе плоскостей проекций $\dfrac{\overline{П2}}{П1}$ положения точки A определяется расстоянием A_1 и $\overline{A2}$, $X\dfrac{П2}{П1} \rightarrow X_1\dfrac{\overline{П2}}{П1}$, $\overline{П2}\perp П_1$.

3. Замена горизонтальной плоскости проекций

(преобразование системы $X\dfrac{П2}{П1} \rightarrow X_1\dfrac{П2}{\overline{\overline{П1}}}$)

Замена горизонтальной плоскости $П_1$ новой плоскость $\overline{П1}$ осуществляется аналогично только что рассмотренному случаю, с той лишь разницей, что теперь остается без изменения фронтальная проекция точки (рис. 95). При переходе к новой системе остается неизменными (является инвариантным преобразованием):

– фронтальная проекция точки $A \rightarrow A_2$;

– расстояние точки A до плоскости $\overline{П2}$, то есть глубина $A_1A_X = AA_2 = A_{X1}$ $\overline{A1} = Y_A$.

Выявленные инвариантные преобразования позволяют построить по комплексному чертежу точки в старой системе плоскостей проекций ее комплексный чертеж в новой системе.

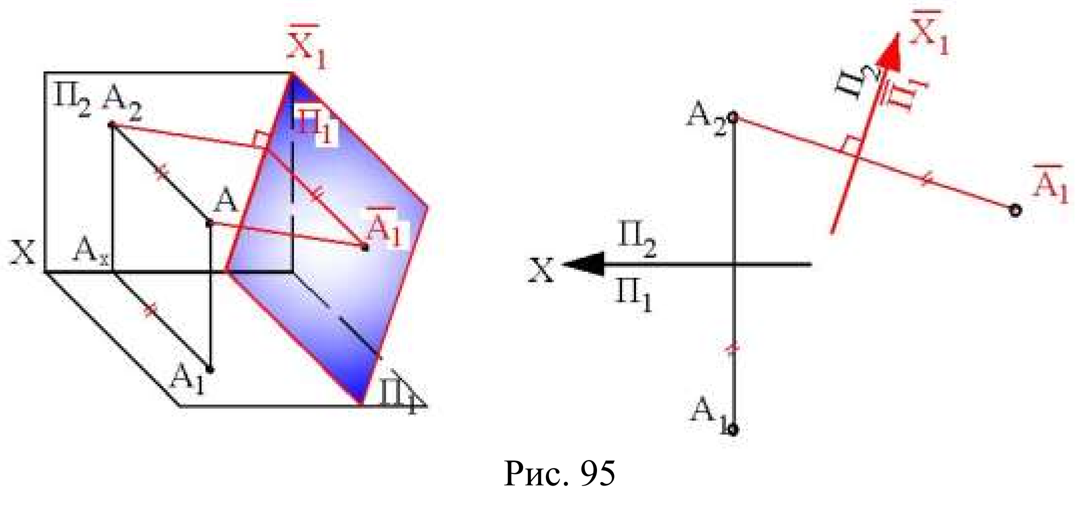


Рис. 95

1. Для этого на комплексном чертеже точка $A(A_1,A_2)$ проводим новую ось X_1, положение которой определяется положением новой горизонтальной плоскости проекций $\overline{П_1}$.

2. Из точки A_2 проводим новую линию связи $A_2\overline{A_1} \perp \overline{X_1}$ – новой оси.

3. На линии связи от X_1 откладываем отрезок $A_1A_X = A_{X1}\overline{A_1} = Y_A$.

Полученная точка $\overline{A_2}$ является проекцией точки А на плоскость $\overline{П_1}$. В новой системе плоскостей проекций положение точки А определяется проекциями A_2 и $\overline{A_1}$.

Объединим способы построения на комплексном чертеже новой проекции точки при замене любой из плоскостей проекций в одно правило. Для построения точки при замене любой плоскости проекции необходимо:

1. Для этого не комплексном чертеже проводим новую ось проекций, учитывая, что ее положение и направление условиями задачи.

2. Провести через незаменяемую проекцию точки новую линию связи перпендикулярную новой базе отсчета.

3. Измерить расстояние заменяемой проекции точки от базы заменяемого поля и отложить его на новой линии связи от базы нового поля.

4. Замена двух плоскостей проекций

Часто при определении действительной величины какой-либо геометрической фигуры или для получения более полного ее изображения замены одной плоскости бывает недостаточно.

В этих случаях приходится осуществлять замену двух плоскостей проекций по схеме: $X\frac{П_2}{П_1} \rightarrow X_1\frac{\overline{П_2}}{П_1} \rightarrow X_1\frac{\overline{П_2}}{\overline{\overline{П_1}}}$ (рис. 96).

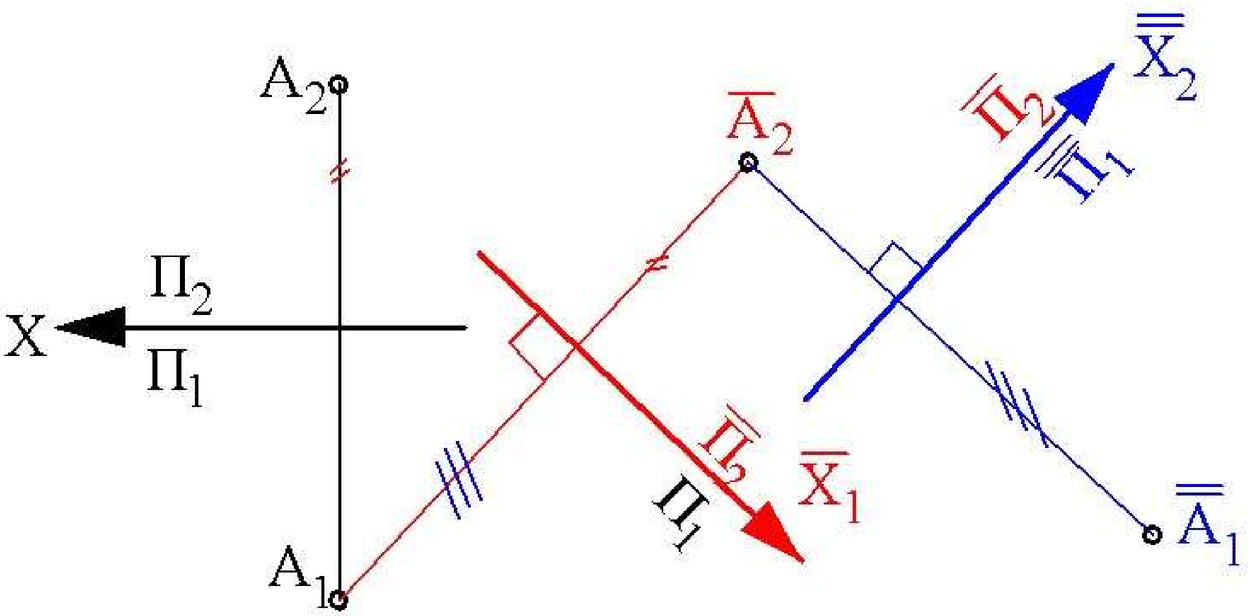


Рис. 96

Для определения новых проекций $\overline{A}_2$ и $\overline{\overline{A}}_1$ заменяем $\Pi_2 \to \overline{\Pi}_2$ и $\Pi_1 \to \overline{\overline{\Pi}}_1$.

1) $X\frac{\Pi_2}{\Pi_1} \to X_1\frac{\overline{\Pi}_2}{\Pi_1}$, $\overline{\Pi}_2 \perp \Pi_1$, $A_2A_X = A_1\overline{A}_2 = Z_A$;

2) $X_1\frac{\overline{\Pi}_2}{\Pi_1} \to X_2\frac{\overline{\Pi}_2}{\overline{\overline{\Pi}}_1}$ (за исходную систему принимается новая $X_1\frac{\overline{\Pi}_2}{\Pi_1}$), $A_1A_{X1} = A_{X2}\overline{\overline{A}}_1$.

При решении задач с применением способа замены плоскостей проекций удобнее исходный комплексный чертеж задавать в основной системе изображения.

Если же исходный комплексный чертеж задан в безосной системе, то можно зафиксировать плоскости проекций Π_1 и Π_2 в каком-либо удобном положении путем проведения на комплексном чертеже оси проекций X.

5. Основные задачи, решаемые способом замены плоскостей проекций

Задача 1. *Преобразовать прямую общего положения в прямую уровня* (рис. 97).

Для решения задачи необходимо заменить Π_1 или Π_2 плоскостью $\overline{\Pi}_2$ или $\overline{\Pi}_1$, параллельную прямой AB или перпендикулярную к другой незаменяемой плоскости проекций. Для того, чтобы прямая AB в новой системе стала фронталью, заменим: $X\frac{\Pi_2}{\Pi_1} \to X_1\frac{\overline{\Pi}_2}{\Pi_1}$, $\overline{\Pi}_2 \parallel AB$, $\overline{\Pi}_2 \perp \Pi_1$.

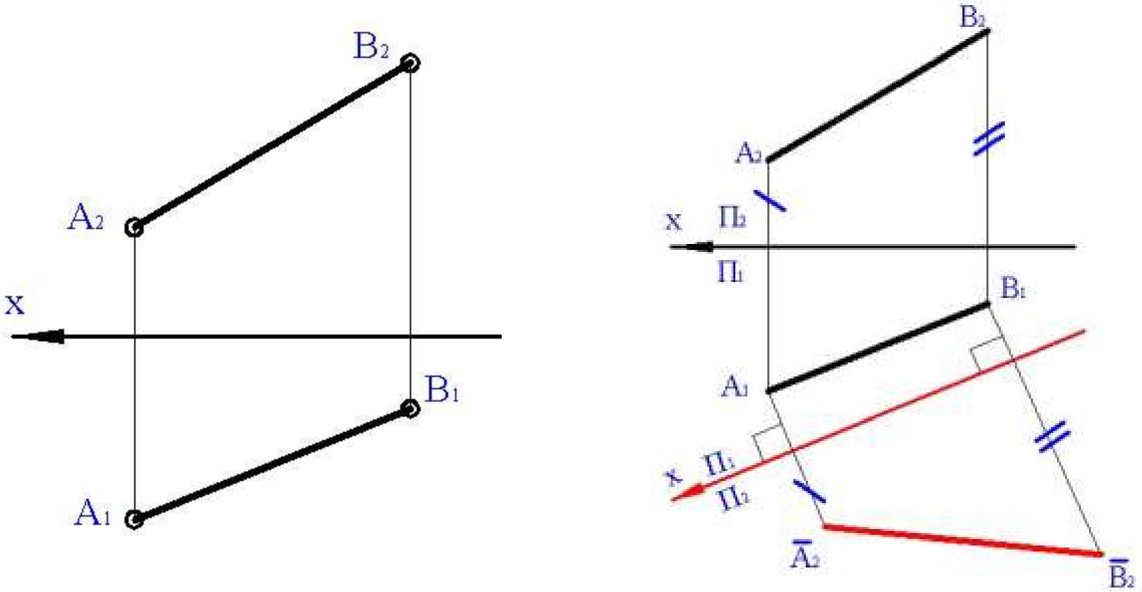


Рис. 97

Построение на комплексном чертеже:

1) Проводим новую ось проекций $\overline{X_1} || A_1B_1$ на произвольном расстоянии от нее.

2) Построим проекции точек А и В прямой на плоскости $\overline{П_2}$.

3) Прямая $\overline{A_2}\ \overline{B_2}$ является проекцией прямой на плоскость $\overline{П_2}$.

Отрезок АВ прямой проецируется на $\overline{П_2}$ в истинную величину, то есть $\overline{A_2}\ \overline{B_2}$ = АВ.

Задача 2. *Преобразовать линию уровня в проецирующую прямую(рис. 98).*

Заданная линия является горизонталью $h(h_1; h_2)$. Для решения задачи заменяем $П_2 \rightarrow \overline{П_2}$, $\overline{П_2} \perp h(CD)$, $\overline{П_2} \perp П_1$, так как $h || П_1$ и образует с ней новую систему $X\dfrac{\overline{П_2}}{П_1}$.

Построение на комплексном чертеже (рис. 97):

1) Проводим новую ось проекций $X_1 \perp h$, такое положение оси X_1 обуславливается тем, что $\overline{П_2} \perp h$.

2) Построим проекции точек А и В на плоскости $\overline{П_2}$, так как расстояния точек C и D до плоскости $П_1$ одинаковы, то проекции их на плоскости $\overline{П_2}$ совпадут, то есть $\overline{A_2} = \overline{B_2} = h_2$.

Прямая $h(h_1; h_2)$ в новой системе является фронтально-проецирующей.

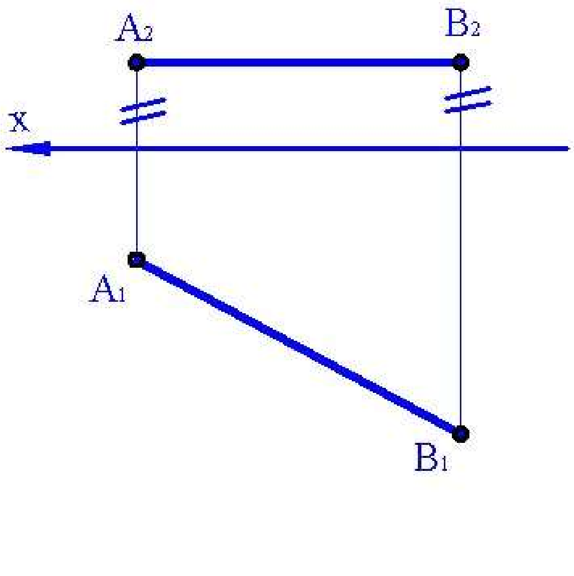


Рис. 98

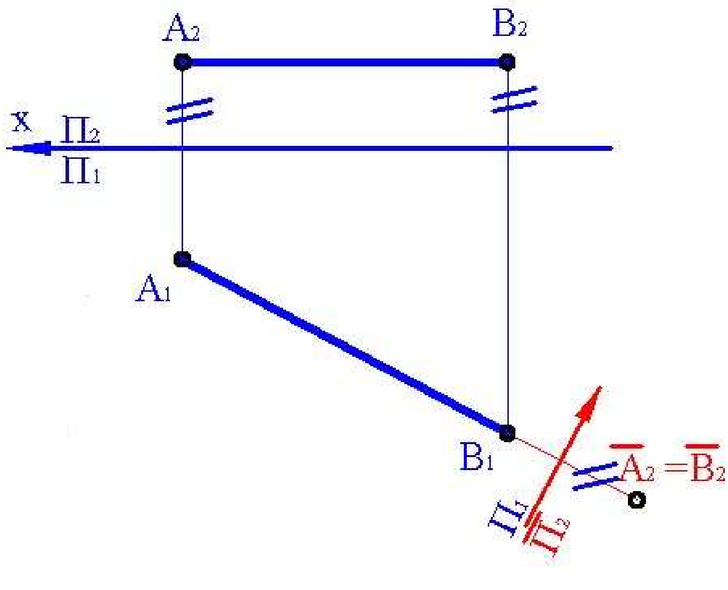


Рис. 99

Задача 3. *Преобразовать прямую общего положения в проецирующую прямую* (рис. 100).

Чтобы прямую общего положения преобразовать в проецирующую необходимо последовательно решить первую, а затем вторую задачи.

Алгоритм (рис. 72).

1. $X\frac{\Pi_2}{\Pi_1} \to X_1\frac{\overline{\Pi}_2}{\Pi_1}$, $\overline{\Pi}_2 \parallel AB$, $\overline{\Pi}_2 \perp \Pi_1$.

2. $X_1\frac{\overline{\Pi}_2}{\Pi_1} \to X_2\frac{\overline{\Pi}_2}{\overline{\overline{\Pi}}_1}$, $\overline{\overline{\Pi}}_1 \perp AB$, $\overline{\overline{\Pi}}_1 \perp \overline{\Pi}_2$.

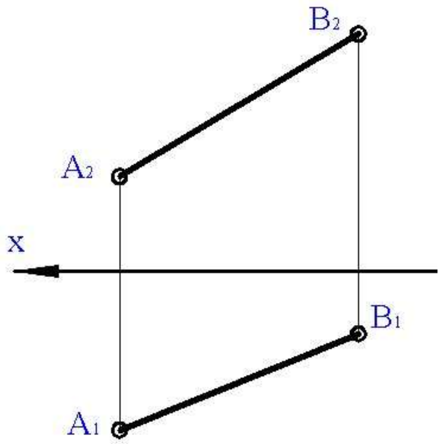


Рис. 100

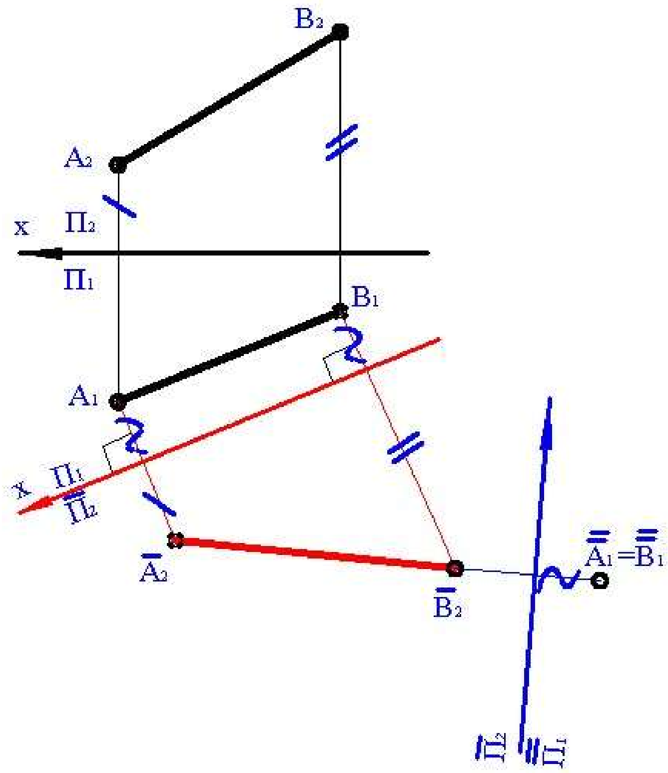


Рис.101

Задача 4. *Преобразовать плоскость общего положения в проецирующую плоскость* (рис. 102).

Для решения задачи необходимо заменить плоскость Π_1 или Π_2 исходной системой $X\frac{\Pi_2}{\Pi_1}$ новой плоскостью $\overline{\Pi}_2$ или $\overline{\Pi}_1 \perp \Sigma(ABC)$. Две плоскости взаимно перпендикулярны, если одна из них проходит через прямую плоскости Σ, преобразованную в проецирующую, то плоскость Σ в новой системе плоскостей проекций станет проецирующей. Проще всего воспользоваться линией уровня (см. рис. 73).

На чертеже плоскость Σ преобразована во фронтально-проецирующую путем преобразования горизонтали $h(h_1;\ h_2)$, принадлежащей плоскости Σ, во фронтально-проецирующую прямую: $X\frac{\Pi_2}{\Pi_1} \to X_1\frac{\overline{\Pi}_2}{\Pi_1}$, $\overline{\Pi}_2 \perp \Pi_1$, $\overline{\Pi}_2 \perp \Sigma(ABC)$, $X_1 \perp h \subset \Sigma(ABC)$. В новой системе $X_1\frac{\overline{\Pi}_2}{\Pi_1}$ плоскость Σ является фронтально-проецирующей ($\Sigma \perp \overline{\Pi}_2$) вырождается в прямую линию $\Sigma_2(\overline{A}_2; \overline{B}_2; \overline{C}_2)$.

Угол α, образованный $\overline{\Sigma_2}$ и осью X_1, является истинной величиной угла наклона плоскости Σ к плоскости Π_1.

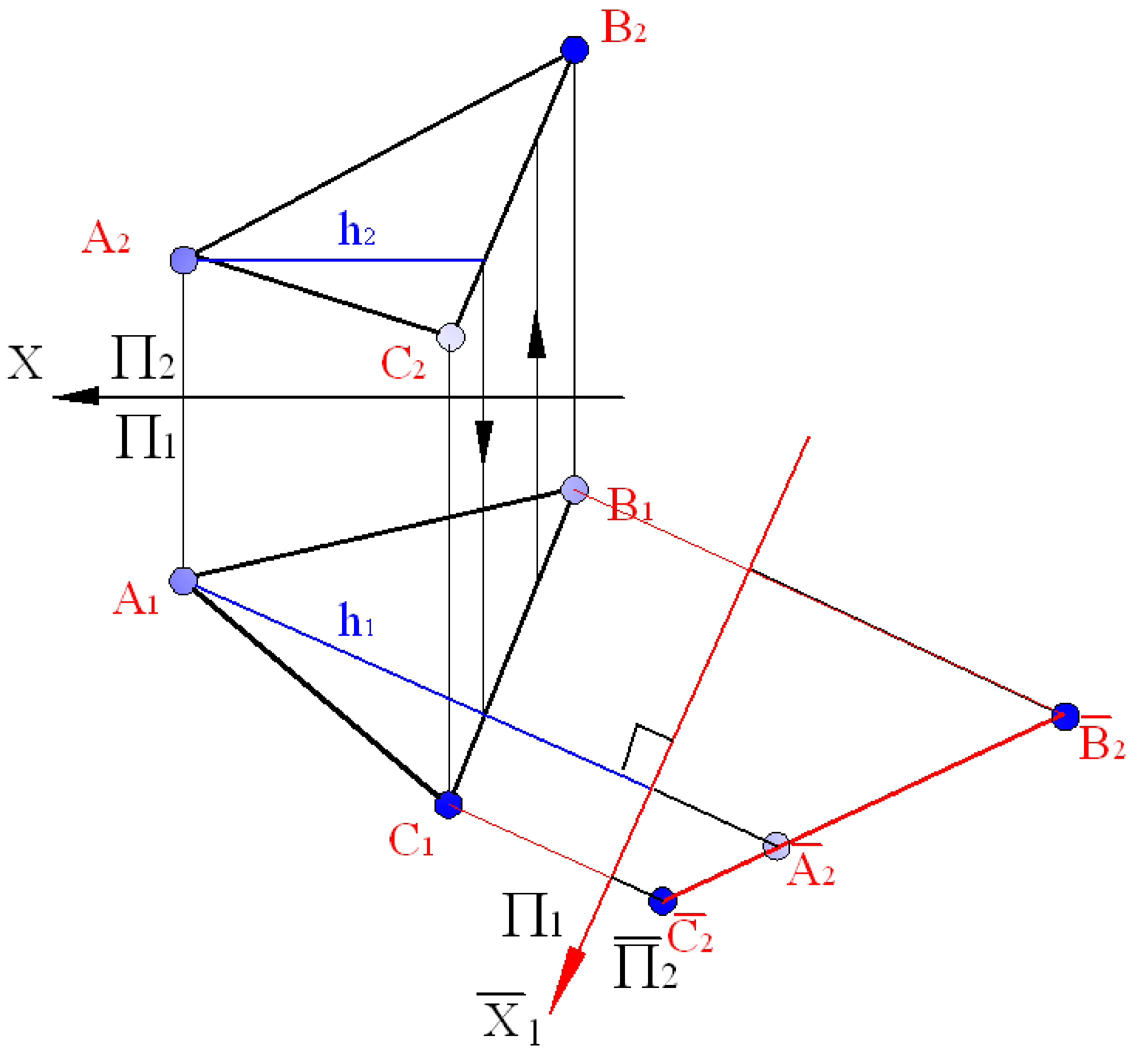


Рис. 102

Задача 5. *Преобразовать проецирующую плоскость в плоскость уровня. Заданная плоскость Δ(ABC) является фронтально-проецирующей* (рис. 103).

Алгоритм.

Заменим $\Pi_1 \to \overline{\Pi_1}$, $X\frac{\Pi_2}{\Pi_1} \to X_1\frac{\Pi_2}{\overline{\Pi_1}}$, $\overline{\Pi_1} \perp \Pi_2$, $\overline{\Pi_1} \,||\, \Delta(ABC)$.

Построим на комплексном чертеже (см. рис. 74):

1) Проводим новую ось проекций $X_1 \,||\, A_2C_2D_2$ на произвольном от нее расстоянии; положение оси проекций обуславливается тем, что $\overline{\Pi_1} \,||\, \Delta(ABC)$.

2) Построим проекции точек A, B, C на плоскости $\overline{\Pi_2}$.

3) Треугольник $\overline{A_1}\ \overline{B_1}\ \overline{C_1}$ является проекцией Δ(ABC) на плоскость $\overline{\Pi_1}$.

В новой системе плоскостей проекций $X\frac{\Pi_2}{\Pi_1}$ плоскость $\Delta(ABC)$ станет горизонтальной плоскостью уровня. Так как плоскость $\Delta(ABC) \parallel \overline{\Pi}_1$, его проекция $\overline{A}_1\,\overline{B}_1\,\overline{C}_1$ является истинной величиной $\Delta(ABC)$.

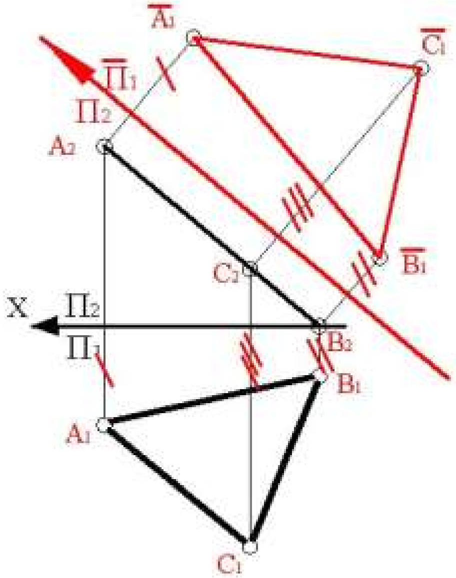


Рис.103

Задача 6. *Преобразовать плоскость общего положения в плоскость уровня.*

Чтобы плоскость общего положения преобразовать в плоскость уровня необходимо последовательно решить третью, а затем четвертую задачу.

Алгоритм (рис. 75).

$$1)\quad X\frac{\Pi_2}{\Pi_1} \to X_1\frac{\overline{\Pi}_2}{\Pi_1} \to \frac{\overline{\Pi}_2}{\overline{\overline{\Pi}}_1},\ \overline{\Pi}_2 \perp \Pi_1,\ \overline{\Pi}_2 \perp \Gamma(ABC);$$

$$X_2\frac{\overline{\Pi}_2}{\Pi_1} \to X_2\frac{\overline{\Pi}_2}{\overline{\overline{\Pi}}_1},\ \overline{\overline{\Pi}}_1 \perp \overline{\Pi}_2,\ \overline{\overline{\Pi}}_1 \parallel \Gamma(ABC).$$

Метрические задачи решаются на основе свойств отрезка, прямой и плоской фигуры проецироваться в натуральную величину на параллельную плоскость проекций.

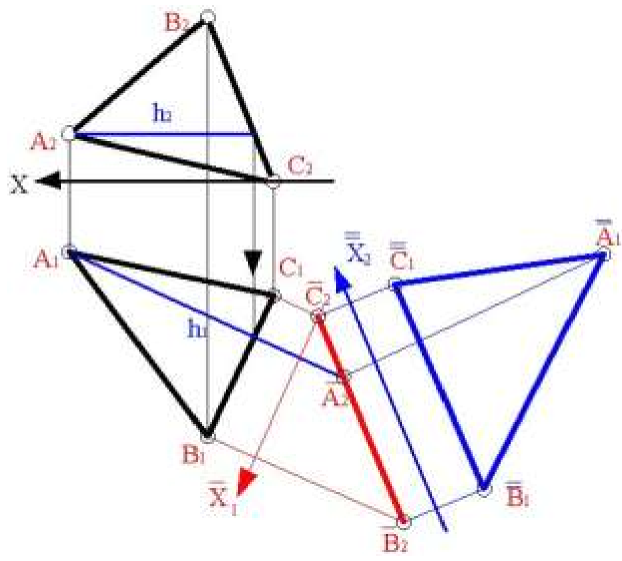


Рис. 104

Задача 7. Построить линию сечения цилиндра плоскостью общего положения.

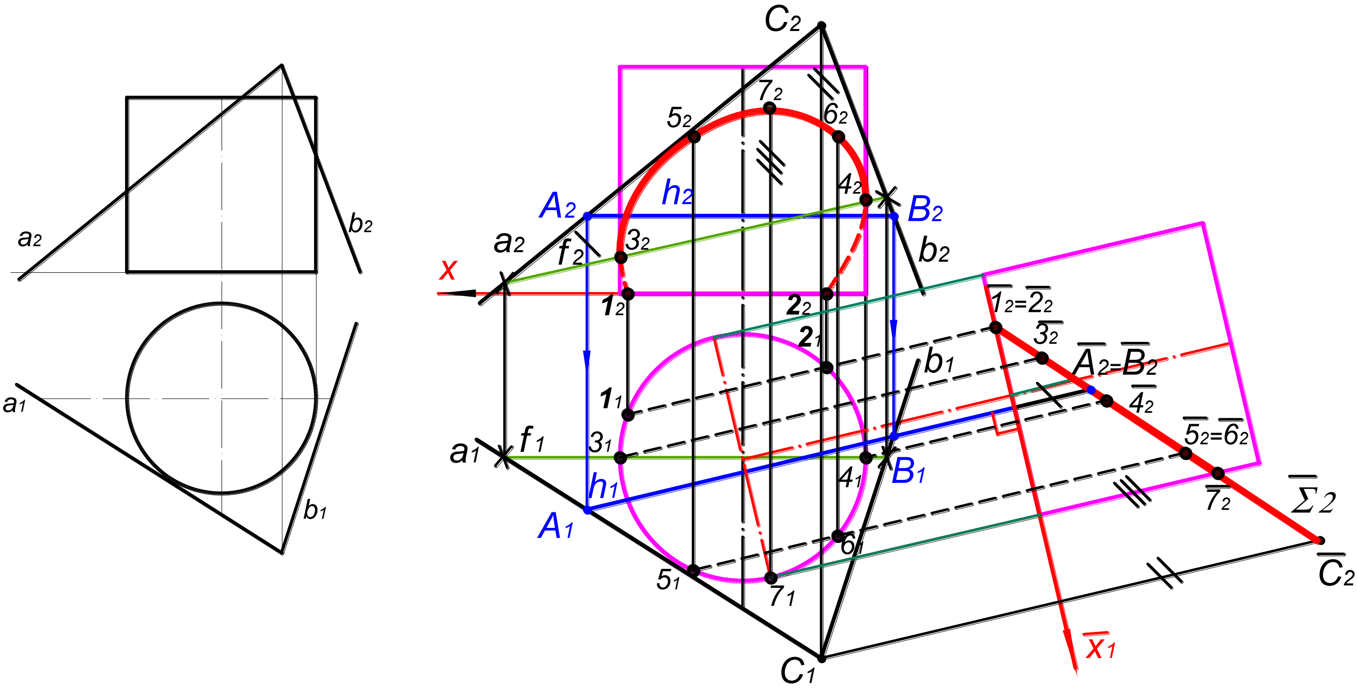


Рис.105

IX. МЕТРИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ

Метрическими называются задачи, связанные с измерениями (metreo - измеряю). В них определяются истинные величины элементов геометрических образов (длина отрезка, величина угла, площадь, объем).

Решение метрических задач основано на свойствах отрезка прямой, и плоской фигуры проецироваться в натуральную величину на параллельную им плоскость проекций.

Поэтому при решении задач целесообразно применять один из способов преобразования комплексного чертежа.

Рассматриваются три типовых группы основных метрических задач:

- задачи, в которых требуется найти расстояние между двумя геометрическими образами;
- задачи на определение величин плоских фигур и углов;
- задачи, связанные с построениями в плоскости общего положения геометрическими образами по заданным размерам.

Общая схема решения этих задач

Одним из способов преобразования комплексного чертежа привести заданные геометрические образы в положение, перпендикулярное какой-либо плоскости проекций;

1. Задачи на определение расстояния

Задача 1. Определить расстояние от точки М до прямой *l* общего положения.
Дано: *l*, М (рис. 106)

Найти: MN $\perp$ *l***.**

Исследование:

Искомое расстояние измеряется отрезком MN перпендикуляра, опущенного из точки М на прямую *l*, перпендикуляр должен быть параллелен плоскости проекций.

Алгоритм (рис. 90).

1. Преобразовать прямую *l* в линию уровня.

$$X\frac{П2}{П1} \rightarrow \overline{X_1}\,\frac{\overline{П2}}{П1} \qquad \overline{П_2} \parallel l\,;\ \overline{П2} \perp П_1$$

2. Преобразовать линию уровня в проекцию.

$$\overline{X_1}\,\frac{\overline{П2}}{П1} \rightarrow \overline{\overline{X2}}\,\frac{\overline{П2}}{\overline{\overline{П1}}} \qquad \overline{\overline{П_1}} \perp l\,;\ \overline{\overline{П_1}} \perp \overline{П2}$$

3. Построить проекцию отрезка MN, длина которой определит искомое расстояние, MN $\perp$ *l*

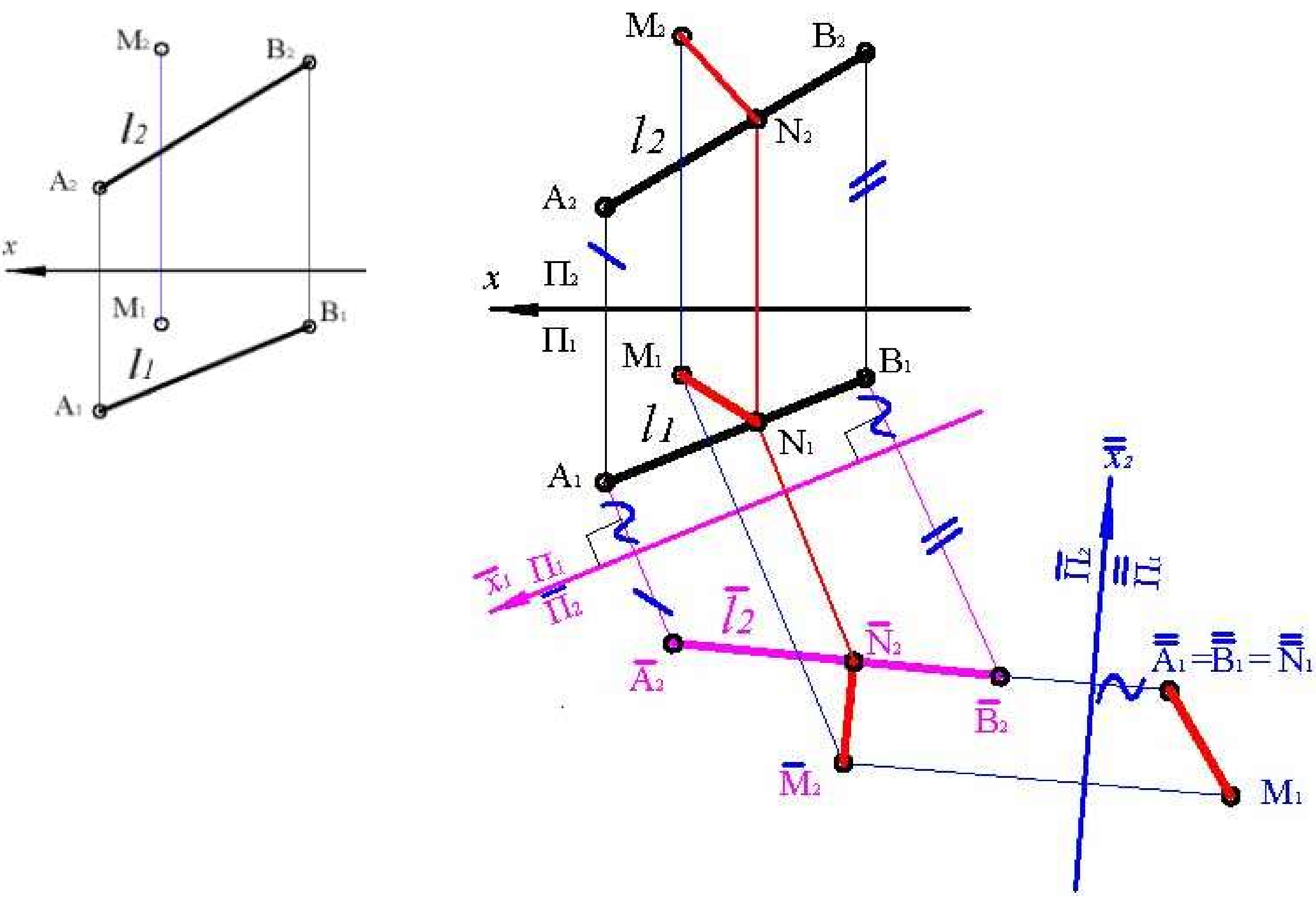


Рис. 106

2.***Задачи на определение истинных величин плоских фигур и углов между двумя геометрическими образами***

Задача 2 (комплексная задача). На прямой l найти точку, равноудаленную от сторон двугранного угла (рис. 107).

Дано: l, α, CBD, CBA

1. Найти: $K = \Sigma \cap l$
2. Исследование:

Искомая точка будет расположена на пересечении биссекторной плоскости двугранного угла α и прямой l.

3. Алгоритм:

а) Определим НВ угол α

$X\frac{\Pi_2}{\Pi_1} \to \overline{X1}\frac{\overline{\Pi_2}}{\Pi_1}$ $\qquad \overline{\Pi_2} \perp CB$ $\qquad \overline{\Pi_2} \perp \Pi_1$

б) Проведем плоскость Σ, делящую угол α пополам

$K = \Sigma \cap l$

Мерой угла между двумя плоскостями служит линейный угол, образованный двумя прямыми – сечениями граней этого угла плоскостью, перпендикулярной к их ребру.

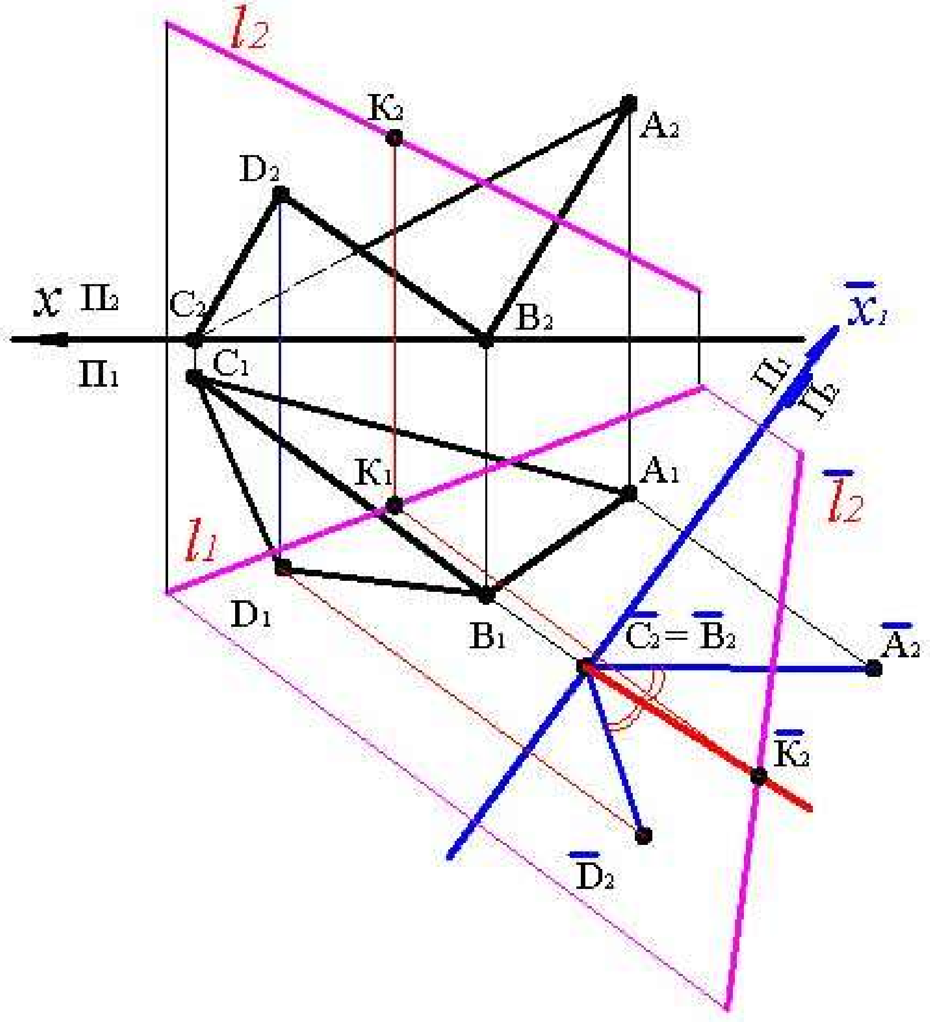


Рис. 107

4. ***Задачи на построение в плоскости общего положения каких-либо заданных геометрических образов***

Задача 3. Вписать окружность в треугольник ABC

Дано: треугольник ABC

Вписать окружность

Алгоритм:

а) Преобразуем треугольник ABC в плоскость уровня

$$X\frac{\Pi 2}{\Pi 1} \rightarrow X1\frac{\overline{\Pi 2}}{\Pi 1} \rightarrow \overline{\overline{X2}}\frac{\overline{\Pi 2}}{\overline{\overline{\Pi 1}}}$$

$$\overline{\Pi 2} \perp ABC \qquad \overline{\Pi 2} \perp \Pi_1$$

$$\overline{\overline{\Pi 1}} \parallel (ABC) \qquad \overline{\overline{\Pi 1}} \perp \overline{\Pi 2}$$

б). Найти центр вписанной окружности, который лежит на пересечении биссектрис.

Центр описанной окружности треугольника лежит на пересечении перпендикуляров к сторонам треугольника, проведенных через их середины.

Центр тяжести лежит на пересечении медиан.

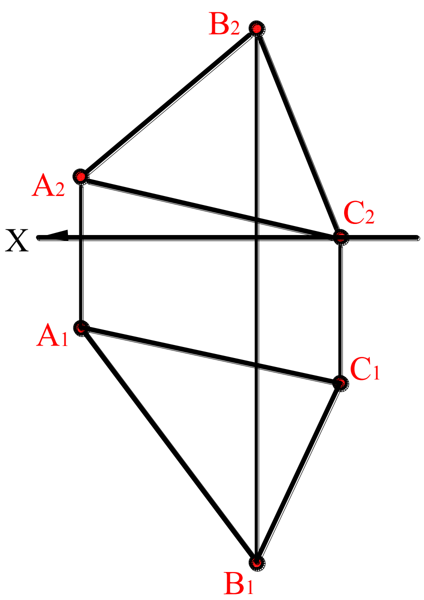


Рис. 108

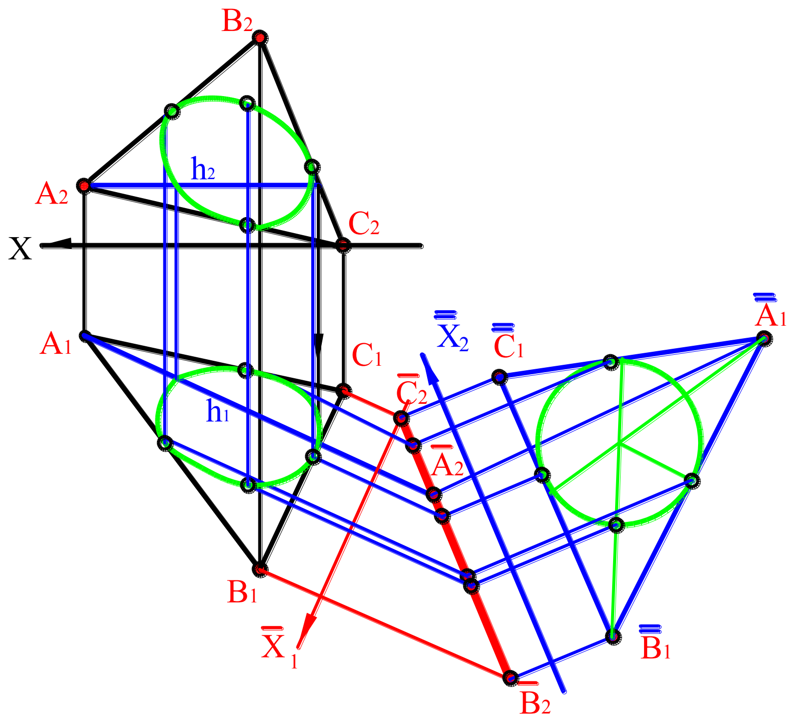


Рис. 109

X. КОМПЛЕКСНЫЕ ЗАДАЧИ

Комплексными называются задачи, в которых на искомый элемент наложены два или более условий.

При решении конкретной комплексной задачи нужно точно указать, сколько и какие именно вспомогательные геометрические образы должны быть введены для определения искомого элемента. Для этого необходимо провести анализ комплексной задачи, алгоритм, исследование, построение.

Этапы решения комплексных задач:

1. Анализ условия задачи;
2. Алгоритм решения задачи;
3. Исследование задачи с целью определения числа ее решения;
4. Построение на комплексном чертеже, то есть графическая реализация алгоритма.

Задача. Найти прямые, проходящие через точку А под углом 60^0 к плоскости Г и пересекающие данную прямую (рис. 110).

Дано: Г, р, А

Анализ.

Искомым элементом являются прямые, на которых наложены два условия.

Прямые с . . .должны принадлежать точки А и должны быть наклонены к Г на угол 60^0. Этому условию удовлетворяет множество прямых, проходящих через точку А на наклоненных к Г под углом 60^0. Геометрическим местом таких прямых является поверхность прямого углового конуса с вершиной в точке А, образующие которого наклонены к Г под углом 60^0. Эти прямые должны пересечь прямую р.

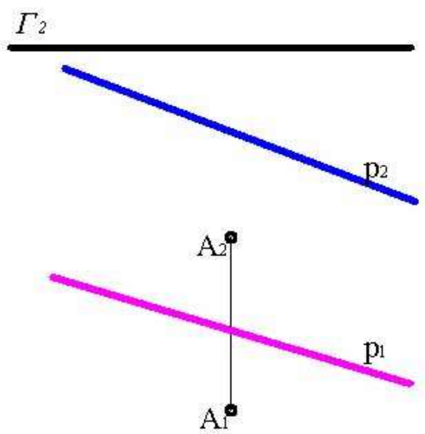


Рис. 110

Алгоритм (рис. 111)

1.Строим конус Ф с вершиной в точке А и наклонной образующей 60^0.

2.Находим точки пересечения $\{K\ldots\} = Ф \cap p$

$$K = (\Sigma \cap Ф) \cap p.$$

3. Соединяем точки А, К.

<u>Исследование.</u>

Задача может иметь два решения, одно и ни одного, если прямая пройдет вне конуса.

<u>Построение.</u>

Графическая реализация алгоритма.

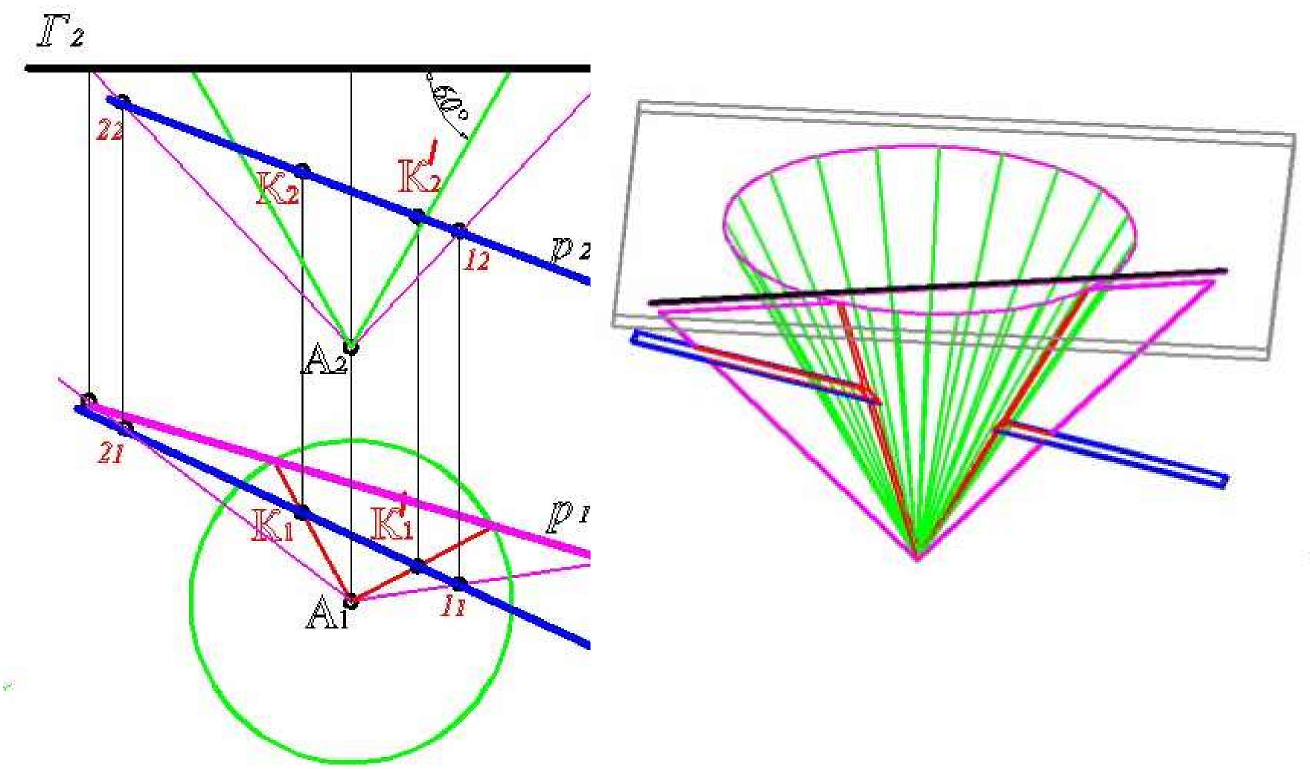


Рис.111

XIV. ПОСТРОЕНИЕ РАЗВЕРТОК ПОВЕРХНОСТЕЙ

Поверхность называется *развертывающей,* если она путем изгибания может быть совмещена с плоскостью без образования складок и разрывов. При этом исходят из представления поверхности как гибкой, но нерастяжимой и несжимаемой пленки.

Свойством развертываемости обладают многогранные поверхности и кривые линейчатые поверхности с ребром возврата. Плоская фигура, полученная в результате совмещения поверхности с плоскостью, называется *разверткой.*

Между поверхностью и ее разверткой существует *взаимно-однозначное точечное соответствие* (точка А на поверхности соответствует точки А' на развертке и наоборот), обладающее следующими свойствами (рис. 112)

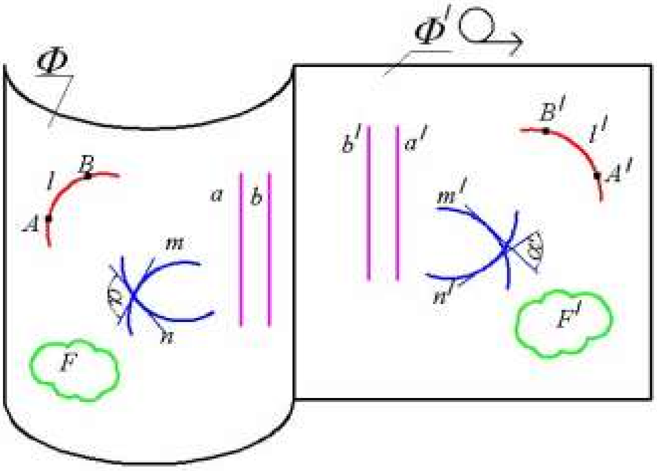


Рис. 112

1. Длина участка AB линии l на поверхности равна длине участка A' B', соответствующей ей линии l' на развертке;

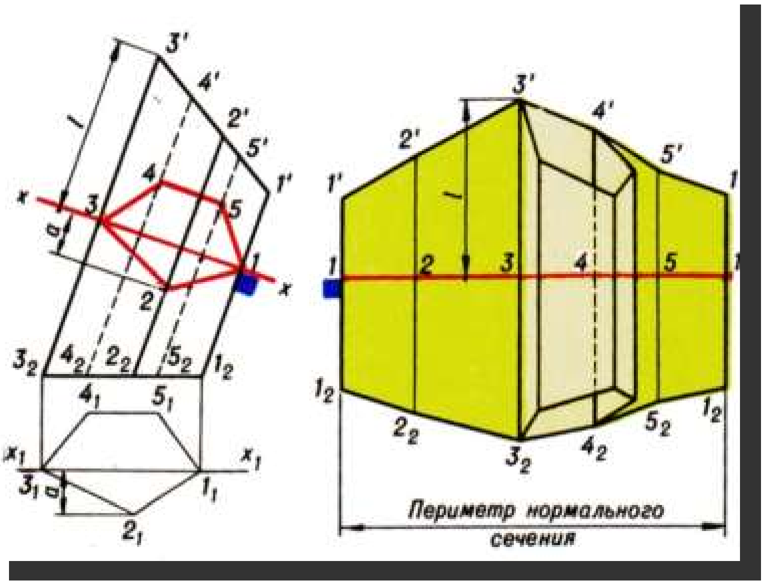
2. Угол α между кривыми m и n на поверхности равен углу α' между соответствующими им кривым m' и n' на развертке (угол между кривыми называется углом между их касательными);

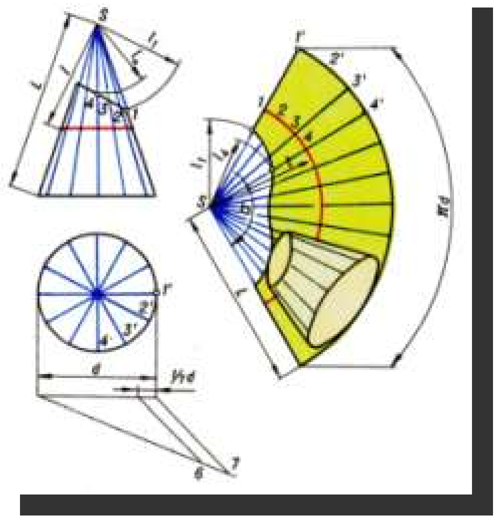
3. Площадь отсека F поверхности равна площади соответствующего ему отсека F' развертки.

Из рассмотренных свойств следует:

а) прямой линии, **a** на поверхности соответствует прямая **a**$^{/}$ на развертке;

б) параллельным прямым **a, b** (**a** || **b**) на поверхности соответствуют параллельные прямые на развертке **a**$^{/}$ || **b**$^{/}$.





1. Построение развертки пирамиды

Боковые грани пирамиды являются треугольниками. Для построения развертки пирамиды (рис. 113) необходимо определить натуральные величины боковых ребер и сторон основания.

У изображенной на рис.113 пирамиды стороны основания лежат в горизонтальной плоскости и проецируются в натуральную величину. Для определения натуральных величин боковых ребер воспользуемся способом прямоугольного треугольника. Так как разности высот всех боковых ребер равны ΔZ, то построим треугольники с общим катетом ΔZ. Вторые катеты равны длинам горизонтальных проекций этих ребер. Гипотенузы этих треугольников S_0A_1, S_0B_1, S_0C_1 являются натуральными величинами боковых ребер. Построение развертки поверхности пирамиды сводится к построению каждой грани как треугольника по трем сторонам.

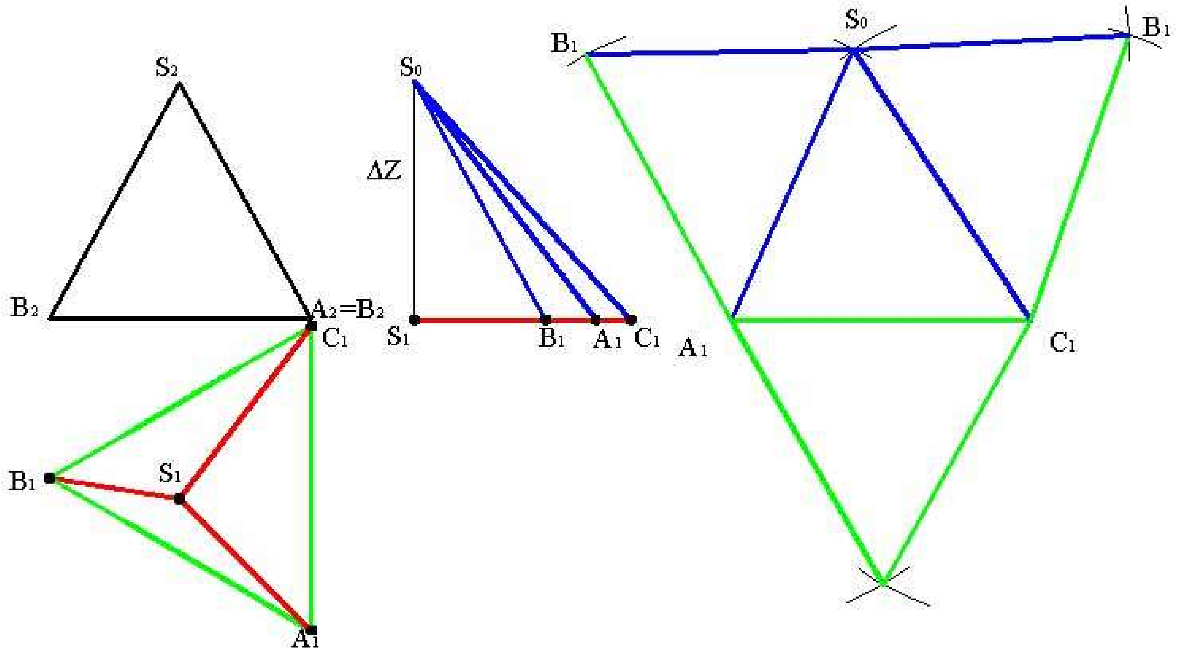


Рис. 113

2. Построение развертки призмы.

Наклонная призма, изображенная на рис. 114, расположена так, что ее ребра параллельны плоскости $П_2$ и проецируются на нее в натуральную величину. Стороны основания параллельны $П_1$ и тоже проецируются без искажений. Таким образом, длины ребер известны, однако этого недостаточно для построения истиной формы боковых граней. Так как боковые грани призмы являются параллелограммами, которые не могут быть построены по четырем сторонам. Для построения параллелограмма необходимо знать еще его высоту. Этот метод построения является способом нормальных сечений, который выполняется в следующей последовательности:

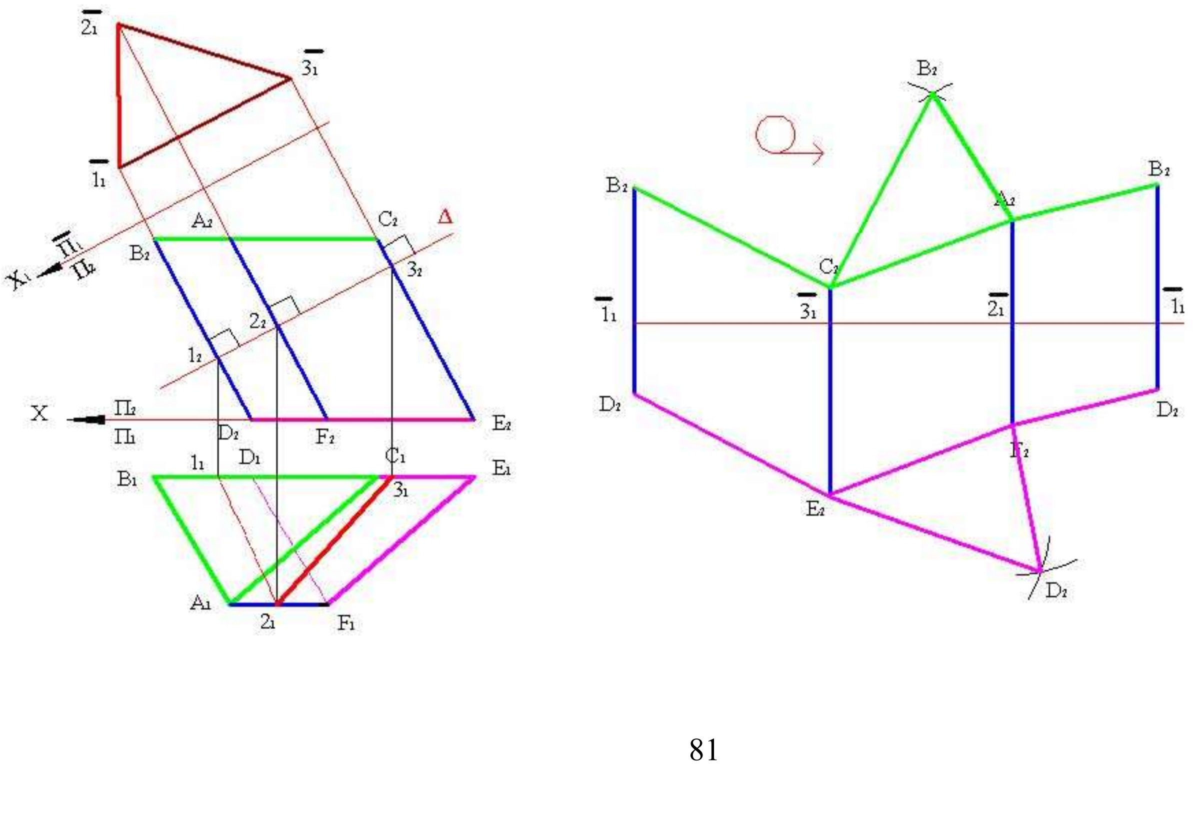


Рис. 114

1) Призма пресекается плоскостью Δ, перпендикулярной ее боковым ребрам;

2) Определяем натуральные величины ломанной 1231 методом замены плоскостей проекций;

3) Эта ломанная 1231 развертывается в отрезок прямой;

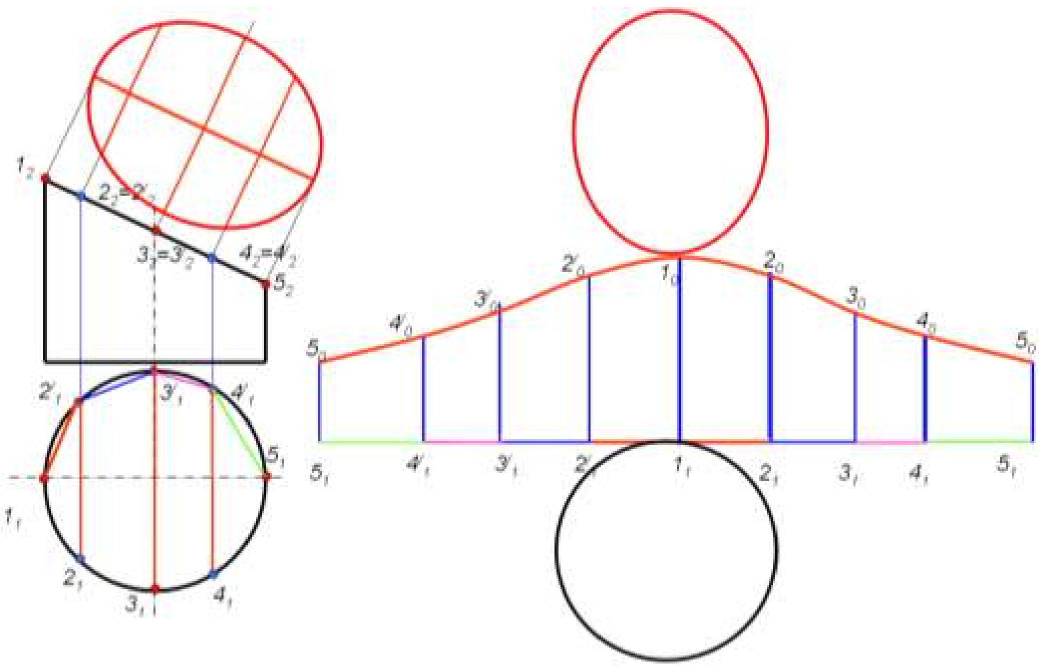
4) На перпендикулярах, проведенных к этой прямой, откладываем натуральные величины соответствующих отрезков ребер;

5) Концы ребер последовательно соединяют отрезками прямых;

К построенной развертке боковой поверхности пристраивают основания призмы.

Построение развертки цилиндра

Обычно строят приближенные развертки кривых поверхностей. Основным способом построения приближенных разверток является способ *аппроксимации* поверхности. Сущность способа *аппроксимации* состоит в том, что кривая поверхность заменяется многогранной поверхностью. Для конических поверхностей применим способ *триангуляции*. Способ *триангуляции* состоит в том, что кривая поверхность заменяется многогранником, состоящим из треугольных граней.



2. Построение развертки конуса

Боковая поверхность прямого кругового конуса (рис. 115) представляет собой сектор круга, радиус которого равен длине образующей конуса. На развертке показана линия сечения конуса цилиндром. Пространственная кривая четвертого порядка преобразуется в плоскую кривую развертки боковой поверхности.

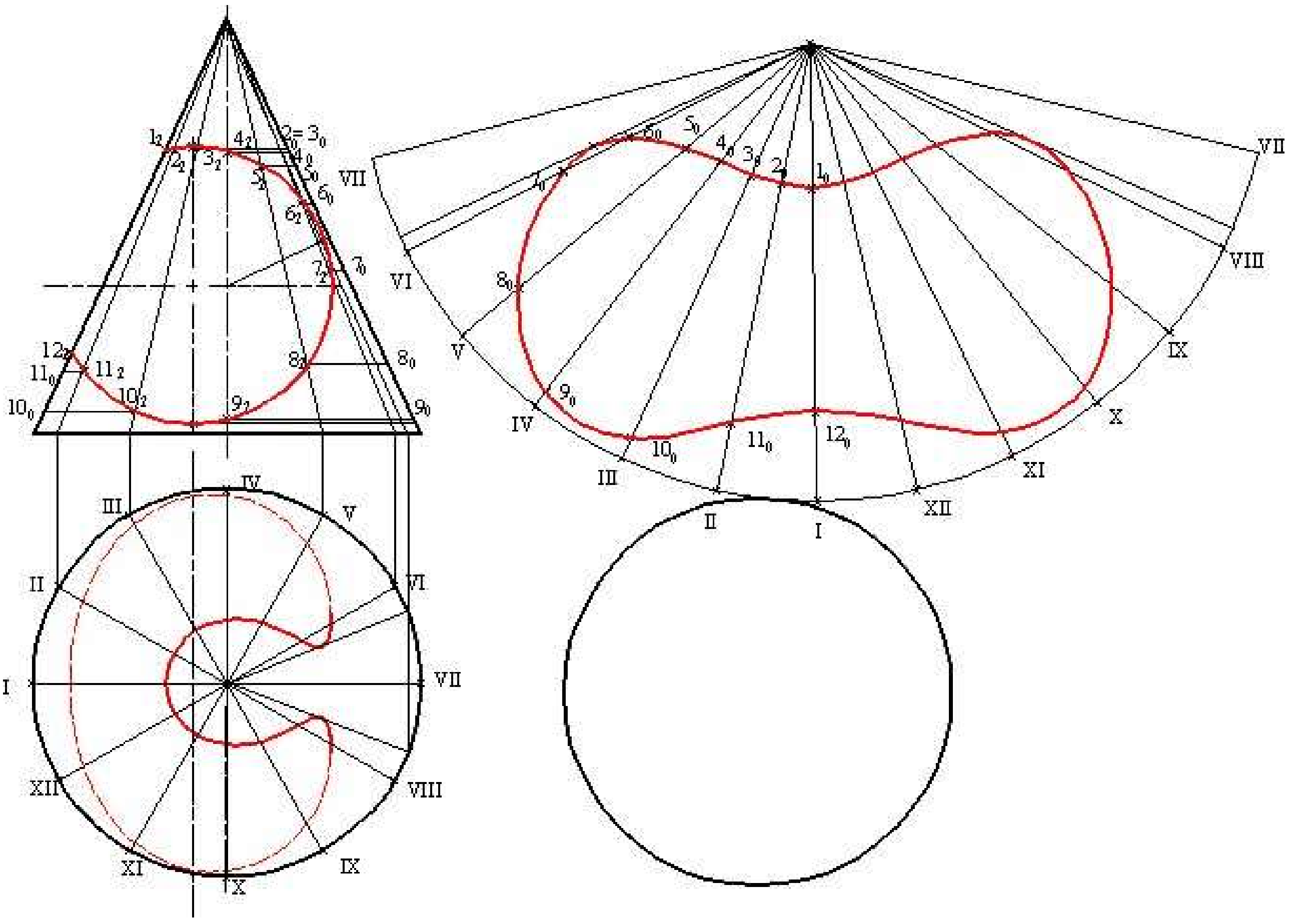


Рис. 115

КРИВЫЕ ЛИНИИ

Кривая – это множество точек пространства, координаты которых являются функциями одной переменной. Термин «кривая» в разных разделах математики определяется по разному. В начертательной геометрии кривую рассматривают как:

- траекторию, описанную движущейся точкой,
- проекцию другой кривой,
- линию пересечения двух поверхностей.

Кривые подразделяются на **алгебраические** и **трансцендентные** в зависимости от того являются ли их уравнение алгебраическими или трансцендентными в прямоугольной системе координат.

Множество алгебраических кривых в свою очередь подразделяются на множество в зависимости от порядка кривой, определяемого степенью ее уравнения.

Кривая называется **плоской**, если все ее точки принадлежат некоторой плоскости, в противном случае она называется **пространственной**.

Алгебраическую кривую линию, которая описывается в системе декартовых координат уравнением второй степени относительно текущих координат, называют **кривой линией второго порядка**.

Эллипс представляет собой множество точек, сумма расстояний от каждой из которых до двух данных точек (фокусов) есть величина постоянная: $|\mathbf{MF_1}| + |\mathbf{MF_2}| = \mathbf{2a}$.

Окружность – частный случай эллипса, когда фокусы совпадают.

Гипербола представляет собой множество точек, разность расстояния до двух данных точек (фокуса) есть величина постоянная: $|\mathbf{MF_1}| - |\mathbf{MF_2}| = \mathbf{2a}$. Касательной прямой **t** в точке **M** кривой **m** называют предельное положение секущей **MN**, когда точка **A** стремится вдоль линии **m** к точке **B**.

Нормалью **n** к плоской кривой в точке **B** называется прямая, перпендикулярная к касательной **t** в этой точке. Нормаль плоской кривой принадлежит ее плоскости. Пространственная кривая имеет в каждой точке бесчисленное множество нормалей, лежащих в нормальной плоскости.

Точка кривой называется **обыкновенной**, если в этой точке можно построить единственную касательную к кривой.

Точка называется особой если в ней не определено положение касательной. К ним относятся:

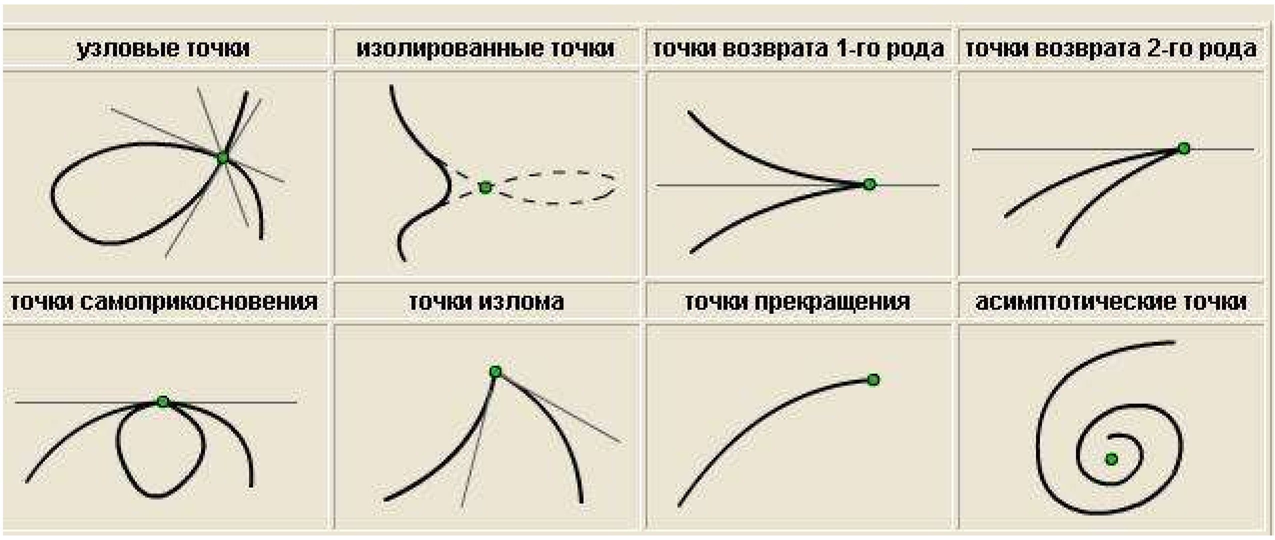


Рис. 116

На ортогональном чертеже кривые линии задают проекциями. При этом, в отличие от задания прямой, необходимо задать по крайне мере проекции одной точки, принадлежащей кривой. На ортогональном чертеже заданы проекции кривой **a**.

Если бы не были бы заданы проекции точки **K**, мы не могли бы построить горизонтальную проекцию $\mathbf{M_1}$ точки **M** по имеющейся фронтальной проекции $\mathbf{M_2}$.

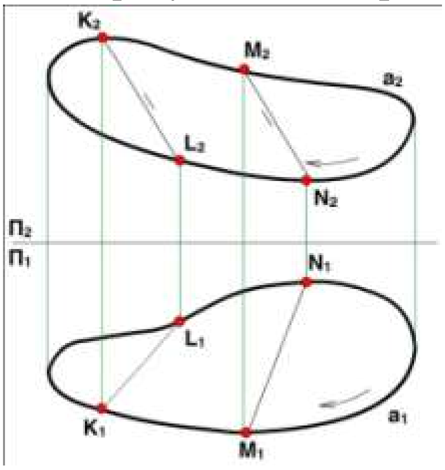
По чертежу кривой в общем случае можно без дополнительных построений определить плоская она или пространственная.

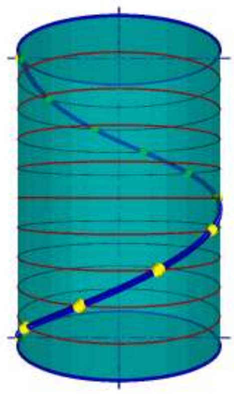
На чертеже задана пространственная кривая **a** , т. к. прямая $\mathbf{K_2L_2}$ параллельна прямой $\mathbf{M_2N_2}$, а $\mathbf{K_1L_1}$ не параллельна $\mathbf{M_1N_1}$.

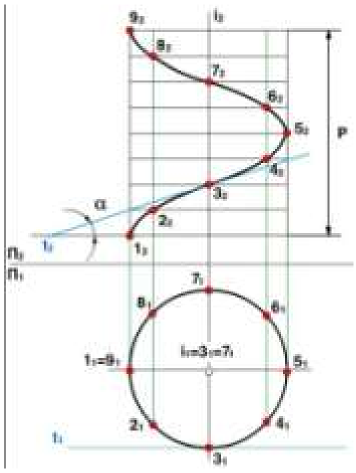
Свойства проекций пространственных кривых:

1. Несобственная и бесконечно удаленная точка кривой проецируется в несобственную точку ее проекции.
2. Касательная к кривой проецируется в касательную ее проекции.
3. Порядок алгебраической кривой равен порядку самой кривой в частных случаях проекция может распадаться и иметь меньший чем у кривой, порядок, например, кривая второго порядка, лежащая в проецирующей плоскости, проецируется в «двойную» прямую. Здесь каждая проецирующая прямая пересекает оригинал дважды. В общем случае, если каждая проецирующая пересекает оригинал в К точках, то порядок проекции в К раз меньше, чем порядок оригинала.

Рассмотрим наиболее часто встречающиеся на практике пространственную кривую – **цилиндрическую винтовую линию**.







118

Рис. 117 Рис.

Цилиндрическую винтовую линию можно рассматривать как траекторию движения точки, равномерно вращающейся вокруг оси и одновременно равномерно перемещающейся в направлении этой оси.

Величину **P** перемещение точки в направлении оси, соответствующего одному полному обороту вокруг оси, называют **шагом винтовой линии**. Описываемая при этом точкой дуга называется **витком**. Радиус **R** цилиндрической поверхности, описываемой прямой **m** вращением вокруг оси **i (i | | m)**, называется **радиусом винтовой линии**. Винтовая линия однозначно определяется своей осью **i**, шагом **P** и радиусом **R**. Поэтому для построения проекций винтовой линии **a** задаем цилиндрическую поверхность вращения с осью **i**, радиусом **R**. Откладываем на оси **i** отрезок равный шагу **P**.

Вырожденная проекция цилиндрической поверхности есть горизонтальная проекция $\mathbf{a_1}$ данной винтовой линии. Для построения фронтальной проекции $\mathbf{a_2}$ делим окружность $\mathbf{a_1}$ на равное число частей, например на 8 частей. Фронтальные проекции точек винтовой линии находятся как точки пересечения одноименных горизонтальных и вертикальных прямых проведенных через точки деления.

ПРЯМЫЕ И ПЛОСКОСТИ, КАСАТЕЛЬНЫЕ К КРИВОЙ ПОВЕРХНОСТИ

Прямая линия, касательная к какой-либо кривой линии, принадлежащей поверхности, является касательной и к поверхности. Через любую точку поверхности можно провести множество кривых, а, следовательно, и множество касательных прямых. В дифференциальной геометрии доказывается, что все эти касательные прямые располагаются в одной плоскости, которая называется **касательной плоскостью** к поверхности в данной ее точке

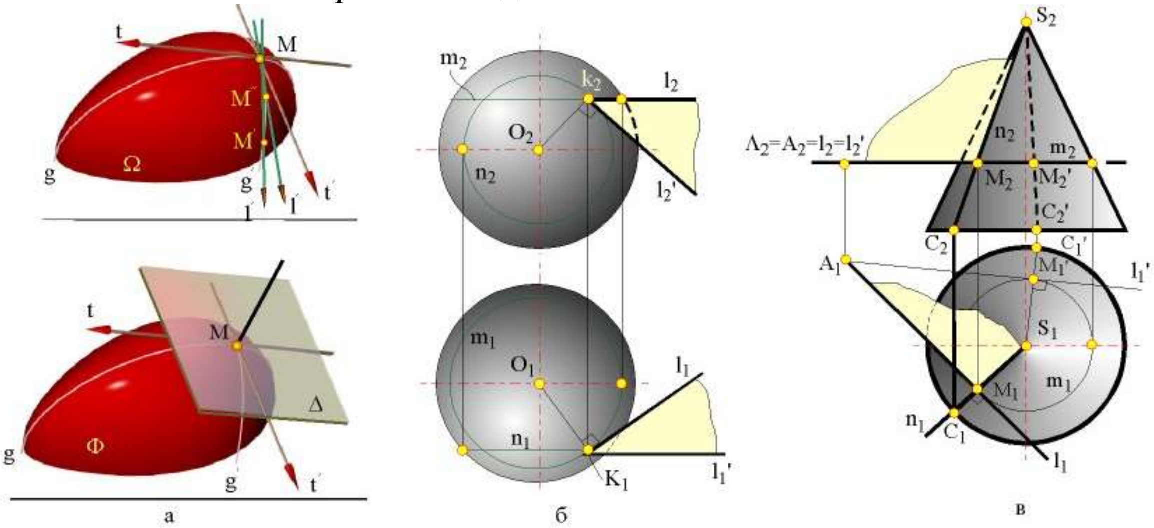


Рис.119

Таким образом, касательная плоскость к поверхности есть множество всех касательных, проведенных к поверхности через одну и ту же точку. Положение плоскости в пространстве определяется двумя пересекающимися прямыми, поэтому для построения касательной плоскости к поверхности в заданной точке достаточно построить касательные к двум кривым линиям, проходящим через эту точку. В качестве таких кривых выбирают наиболее простые линии поверхности. Если данная поверхность является линейчатой, то за одну из таких кривых целесообразно взять прямолинейную образующую (касательная к прямой линии есть сама прямая)

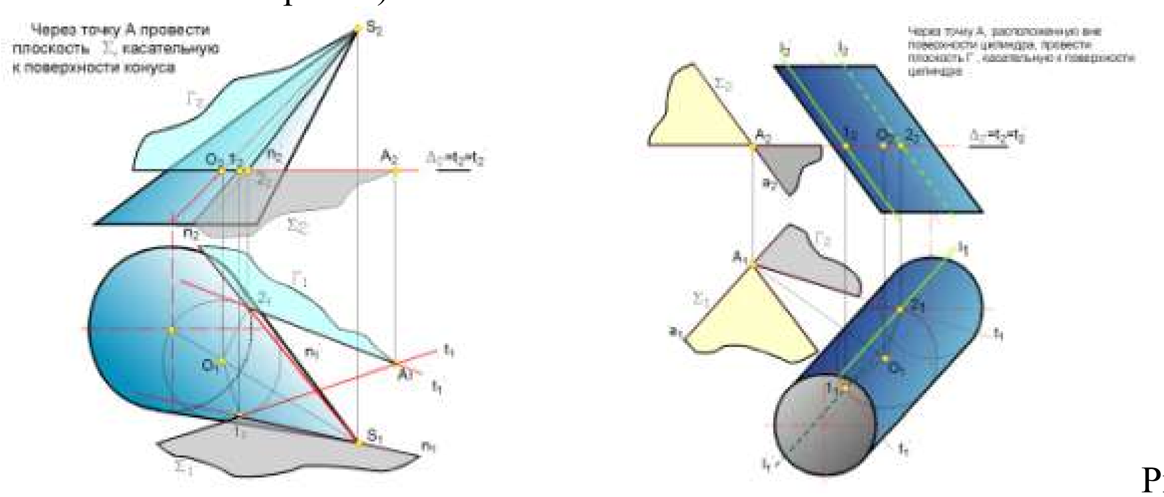


Рис.120

Перпендикуляр, восставленный к касательной плоскости в точке ее касания с поверхностью, называется нормалью к поверхности. Касательная плоскость может иметь с поверхностью одну общую точку и располагаться по одну сторону от нее. Такие точки поверхности называются **эллиптическими** (рис. 8.5, а). Примерами поверхностей, все точки которых эллиптические, являются сфера, эллипсоид вращения и др.

Касательная плоскость к поверхности в некоторой ее точке может пересекать поверхность (рис. 8.5) по прямым или кривым линиям. Такие точки поверхности называются гиперболическими. Примерами поверхностей, имеющих гиперболические точки, могут служить однополостный гиперболоид, тор и др. Касательная плоскость может иметь с поверхностью общую линию - прямую или кривую (рис. 8.1, в). Точки кривой поверхности, принадлежащие линии касания, называются параболическими.

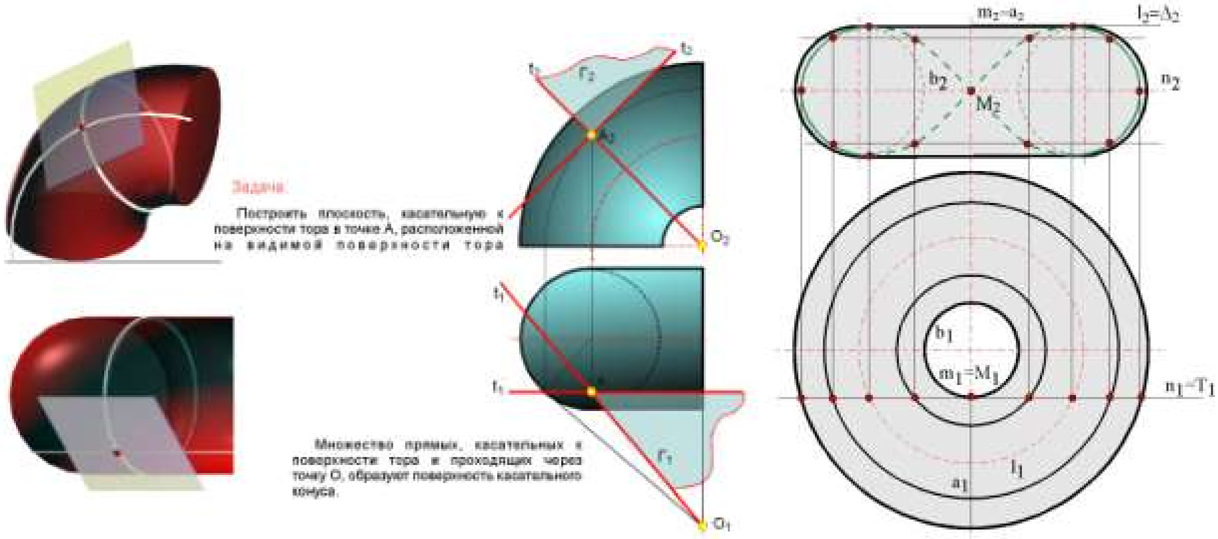


Рис.121

Примерами поверхностей, все точки которых параболические, являются цилиндрические, конические поверхности и торсы.
Поверхность тора содержит все три вида точек.
Плоскость Г(l ∩l') касается сферы в точке К (рис.); плоскость Λ(l ∩l') касается конуса по прямой [CS] (рис. 8.1в); плоскость T $\|\Pi_2$ касается тора в точке М и пересекает его по лемнискате, плоскость Δкасается тора по окружности l

1. ЦИКЛИЧЕСКИЕ ПОВЕРХНОСТИ

Циклической поверхностью называется поверхность, образованная непрерывным каркасом круговых сечений.   На циклической поверхности расположено, по крайней мере, одно семейство круговых образующих (постоянного или переменного радиуса).

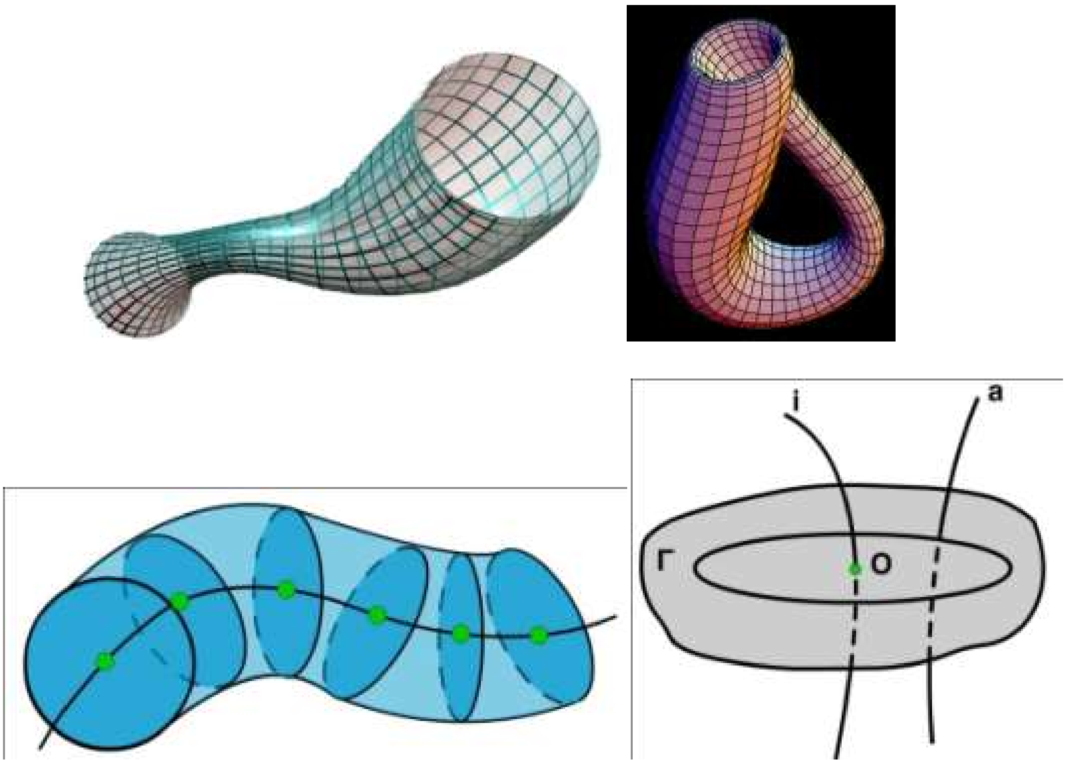


Рис.122

Задание циклической поверхности должно однозначно определять положение плоскости каждой окружности, положение в плоскости и величину радиуса.

Циклическую поверхность можно задать плоскостью параллелизма, направляющей **a** и линией, которой принадлежат центры семейства окружностей **Q (a, i, Г)**. На рисунке показана поверхность **Q (a, i, Г)**, где плоскости окружности циклической поверхности параллельны плоскости проекций **$П_1$**.

2. Трубчатые поверхности

Распространенные на практике разновидности циклических поверхностей - трубчатые поверхности переменного или постоянного радиуса.

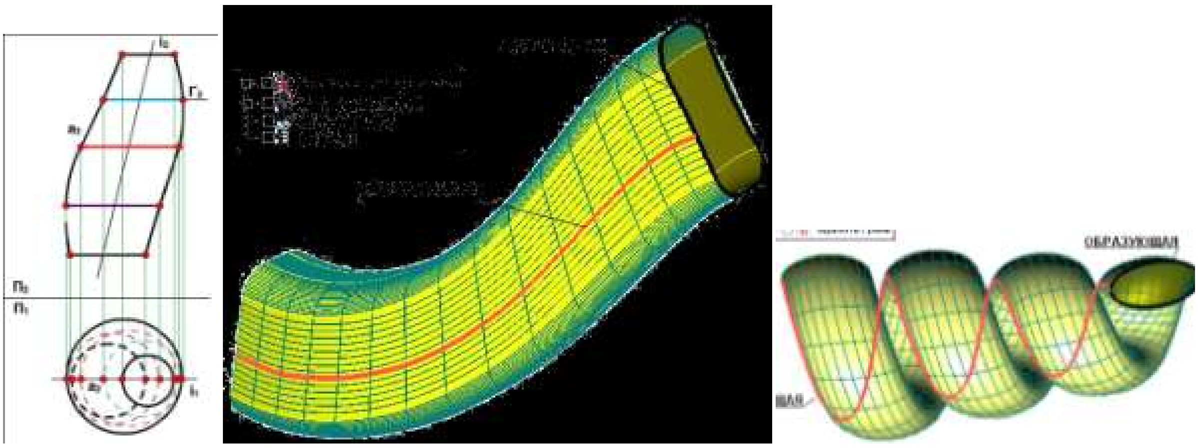


Рис.123

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. И.И. Шундеева. НАЧЕРТАТЕЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ. Конспект лекций. Челябинск, изд-во ЮУрГУ, 2007.
2. И.И. Шундеева. НАЧЕРТАТЕЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ. Учебное пособие по решению задач, контрольные задания. Челябинск, изд-во ЮУрГУ, 2006.
3. И.И. Шундеева. ИНЖЕНЕРНАЯ ГРАФИКА. Учебное пособие по выполнению графических заданий . Челябинск, изд-во ЮУрГУ, 2006.
4. Сенигов, Н.П. Начертательная геометрия: учебное пособие . Челябинск: Изд. ЮУрГУ, 2000.
5. Начертательная геометрия / под ред. Н.Н. Крылова. – М.: Высшая школа, 2000.
6. Короев, Ю.И. Начертательная геометрия – М.: Стройиздат, 1987.
7. Чекмарев, А.А. Справочник по машиностроительному черчению – М.: Высшая школа, 2004.